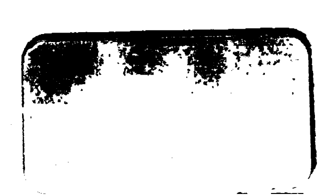




Theorie

der

Elektricitäts- und Wärme-Vertheilung

in

einem Ringe

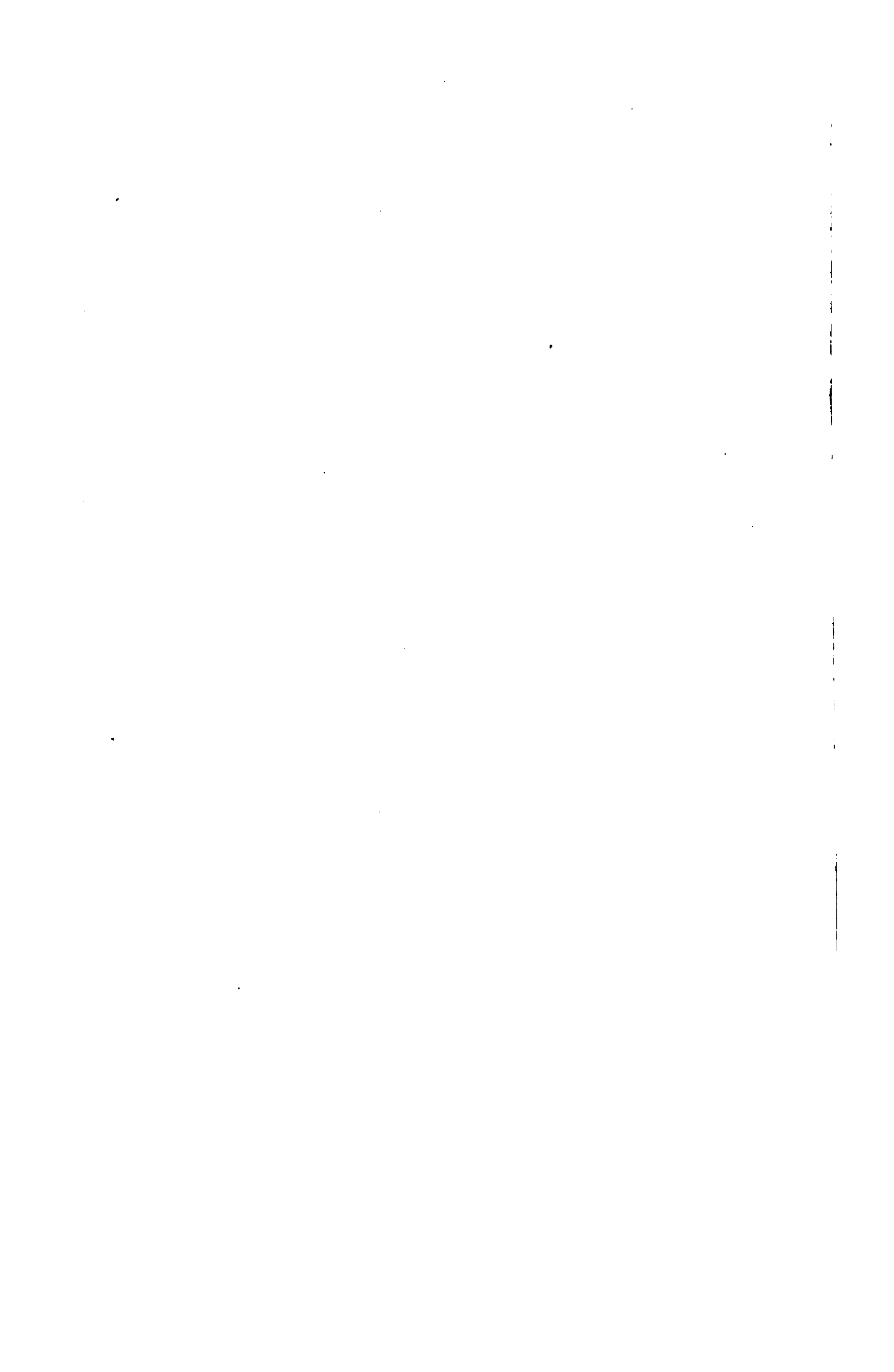
von

Carl Neumann.

Halle,

Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses.

1864.



Vorwort.

In der theoretischen Physik treten uns häufig Probleme entgegen, bei denen es sich, was ihre mathematische Behandlung anbelangt, um die Integration der Gleichung

$$\Delta W = 0,$$

d. i. um die Ermittelung einer Function W handelt, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet. Eines der hierher gehörigen Probleme, und zwar dasjenige, von welchem in der vorliegenden Abhandlung die Rede sein wird, ist folgendes:

> Problem. Es soll eine von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängende Function W gefunden werden, welche
>
> I. innerhalb eines gegebenen Körpers der Gleichung $\Delta W = 0$ Genüge leistet, welche
>
> II. innerhalb dieses Körpers, ebenso wie $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ und $\frac{\partial W}{\partial z}$, überall eindeutig und stetig ist, und welche endlich
>
> III. an der Oberfläche des Körpers einen beliebig gegebenen Werth besitzt.

*

Eine allgemeine Lösung dieses Problems scheint bei dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft zu sein. Jenachdem nämlich die Gestalt des Körpers so oder so beschaffen ist, müssen, scheint es, um die Lösung des Problems zu erhalten, jedesmal andere und andere mathematische Hülfsmittel aufgefunden und in Anwendung gebracht werden.

Es schien mir der Mühe werth, zu untersuchen, ob es nicht vielleicht möglich wäre, eine Methode zu finden, durch welche die Lösung des Problems, wenn auch nicht für beliebige Körper, so doch wenigstens für alle Rotationskörper ermöglicht wird.

Obwohl nun meine Versuche auch in dieser Beziehung zu keinem befriedigenden Abschluss geführt haben, so scheint mir doch ein Ergebniss, das sich mir bei dieser Gelegenheit darbot, nicht ohne Bedeutung zu sein. Es lässt sich dasselbe in folgender Weise aussprechen:

> Versuch einer allgemeinen Methode zur Lösung des Problems für beliebige Rotationskörper. — Die Meridiancurve des gegebenen Rotationskörpers mag bezogen gedacht werden auf zwei rechtwinklige Coordinatenachsen ξ, η, von welchen die eine, nämlich ξ, identisch ist mit der Rotationsachse des Körpers. Ferner mögen zwei eindeutige, von ξ, η abhängige Functionen ϑ, ω gefunden sein, welche folgende Bedingungen erfüllen:
>
> I. ϑ soll im Innern der Miridiancurve der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} = 0$ Genüge leisten, und auf jener Curve selber einen gegebenen constanten Werth ϑ_0 besitzen;

II. ω soll zu ϑ in der Beziehung stehen:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \frac{\partial\omega}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} = -\frac{\partial\omega}{\partial\xi}.$$

Die Gleichungen $\vartheta = \text{Const.}$ und $\omega = \text{Const.}$ werden dann zwei orthogonale Curvensysteme vorstellen, welche beide in der Meridianebene liegen, und von welchen das erstere die Meridiancurve des gegebenen Rotationskörpers mit in sich enthält. Die Grössen ϑ, ω selber werden also die Parameter dieser beiden Curvensysteme repräsentiren.

Bezeichnet man nun den Winkel, unter welchem eine beliebige Meridianebene gegen irgend eine als fest angenommene Meridianebene geneigt ist, mit φ, und benutzt man jene beiden Parameter ϑ, ω in Verbindung mit diesem Winkel φ zur Ortsbestimmung irgend eines Punktes im Raume, so verwandelt sich die Differentialgleichung $\Delta W = 0$ in folgende:

$$\frac{\partial^2(W\sqrt{\eta})}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2(W\sqrt{\eta})}{\partial\omega^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2(W\sqrt{\eta})}{\partial\varphi^2} + \frac{W\sqrt{\eta}}{4}\right) = 0,$$

wo der Coefficient σ allein von ϑ und ω abhängt, nämlich folgende Bedeutung hat:

$$\sigma = \left(\frac{\partial \log \eta}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log \eta}{\partial\omega}\right)^2.$$

Um also das in Rede stehende Problem für den gegebenen Rotationskörper zu lösen, handelt es sich nur um die Ermittelung einer von ϑ, ω, φ abhängenden Function U, welche

I. im Innern des Körpers der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{U}{4}\right) = 0$$

Genüge leistet, welche

II. im Innern des Körpers gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt, und welche endlich

III. an der Oberfläche des Körpers, d. h. für $\vartheta = \vartheta_0$, identisch wird mit einer beliebig gegebenen Function $F(\omega, \varphi)$. *)

Diese hier mitgetheilte Methode — man findet die Deduction derselben im ersten Paragraph der vorliegenden Abhandlung — wird, wie man leicht übersieht, stets zur Lösung des in Rede stehenden Problems führen, sobald der oben genannte Coefficient σ zufälliger Weise eine Summe zweier Grössen ist, von welchen die eine nur von ϑ, und die andere von ω abhängt.

Solches ist z. B. dann der Fall, wenn die Meridiancurve des gegebenen Körpers eine Ellipse ist, deren Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt.

Ein anderer hierher gehöriger Fall ist derjenige, den ich in einer früheren Abhandlung **) untersucht habe, nämlich der,

*) Ist nämlich $G(\omega, \varphi)$ der gegebene Werth, welchen W auf der Oberfläche des Körpers besitzen soll, so wird

$$F(\omega, \varphi) = G(\omega, \varphi) \cdot \sqrt{\eta}$$

sein, wo η denjenigen Werth vorstellt, welchen die Grösse η auf der eben genannten Fläche besitzt. Der Definition zufolge bedeutet η den Abstand eines Punctes von der Rotationsachse. Ist nun $\eta = f(\vartheta, \omega)$ diejenige Formel, durch welche dieser Abstand η als Function der Parameter ϑ, ω dargestellt wird, so wird derselbe auf der Oberfläche des Körpers den Werth $\eta = f(\vartheta_0, \omega)$ besitzen, wo ϑ_0 die oben erwähnte Constante vorstellt. Mithin wird

$$F(\omega, \varphi) = G(\omega, \varphi) \cdot \sqrt{f(\vartheta_0, \omega)}$$

sein.

**) Man sehe meinen Aufsatz in Borchardt's Journal f. Mathematik. Bd. 62, betitelt: „Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektricität in einem Körper, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.

dass die Meridiancurve des gegebenen Körpers aus zwei nicht concentrischen und einander nicht schneidenden Kreisen besteht, deren Mittelpunkte beide in der Rotationsachse liegen. Alsdann nämlich ist σ allein von ω abhängig.

Ein dritter Fall endlich, welcher in diese Kategorie gehört, ist der in der vorliegenden Abhandlung untersuchte; nämlich der, dass die Meridiancurve des gegebenen Körpers aus einem Kreise besteht, der irgend wo auf der einen Seite der Rotationsachse liegt, nämlich aus einem Kreise, welcher die Rotationsachse nirgends schneidet. Hier wird σ allein von ϑ abhängig.

Immer sind es also nur sehr specielle Fälle, bei welchen meine Methode zur wirklichen Lösung des Problems führt. Dennoch scheint die Differentialgleichung, auf welche das Problem bei Anwendung dieser Methode zurückkommt, so einfacher Natur, dass die Hoffnung einer allgemeinen Lösung desselben, nämlich einer Lösung für beliebige Rotationskörper wohl noch nicht ganz aufzugeben sein dürfte. Die Auffindung der Functionen ϑ und ω ist mit nicht zu grossen Schwierigkeiten verbunden, und wird sich in jedem gegebenen Fall leicht bewerkstelligen lassen, so dass es sich immer nur um die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{U}{4}\right) = 0$$

handelt, nämlich um die Ermittelung einer Function U, welche dieser Gleichung Genüge leistet, und welche gleichzeitig auch die übrigen oben angegebenen Bedingungen erfüllt.

Was die hier vorliegende Abhandlung anbelangt, so muss ich noch eine Bemerkung rein formeller Natur vorausschicken. Unter einer Summe $\sum_{p=0}^{p=n} T_p$ ist in üblicher Weise immer folgender Ausdruck zu verstehen:

$$\sum_{p=0}^{p=n} T_p = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_n.$$

Anders dagegen verhält es sich mit denjenigen Summen, welche kurzweg mit $\sum_p T_p$ bezeichnet sind. Eine solche Summe ist nämlich in Gedanken zuerst hinzuerstrecken von $p = -\infty$ bis $p = +\infty$, und sodann sind die Glieder mit negativem p als identisch zu betrachten mit denjenigen, welche ein positives p besitzen, so dass $\sum_p T_p$ olgenden Werth vorstellt:

$$\sum_p T_p = T_0 + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + \cdots$$

Dem analog ist die Bedeutung, welche in der vorliegenden Abhandlung $\sum_p \sum_q T_p^q$ besitzt, nämlich:

$$\begin{aligned}\sum_p \sum_q T_p^q = T_0^0 &+ 2T_0^1 + 2T_0^2 + 2T_0^3 + \cdots \\ &+ 2T_1^0 + 2T_2^0 + 2T_3^0 + \cdots \\ &+ 4T_1^1 + 4T_1^2 + 4T_1^3 + \cdots \\ &+ 4T_2^1 + 4T_2^2 + 4T_2^3 + \cdots \\ &+ 4T_3^1 + 4T_3^2 + 4T_3^3 + \cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Basel, im Mai 1864.

C. Neumann.

Inhalt.

§. 1.

Allgemeine Coordinaten-Transformationen.

An Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z mögen die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme eingeführt werden, von welchen zwei Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Achse sind, während das dritte durch die Meridianebenen dieser Rotationsflächen dargestellt wird.

Die x Achse sei die Rotationsachse, und die yz Ebene die Aequatorebene.

Der Winkel, unter welchem eine beliebige Meridianebene gegen die feste xy Ebene geneigt ist, soll φ genannt werden. Ferner mögen in jeder Meridianebene zwei Achsen angenommen werden, eine Achse ξ, die mit der Rotations-, d. i. mit der x Achse zusammenfällt, und eine andere Achse η, die in der Aequatorebene liegt.

Jede Meridianebene soll auf der einen Seite von der Rotationsachse begrenzt gedacht werden, so dass der Winkel φ von $0°$ bis $360°$ wachsen muss, falls die Ebene alle Stellen des Raumes durchlaufen soll. *)

Ist die Meridianebene irgend eines Punctes durch Angabe ihres Winkels φ festgesetzt, und sind ferner die Coordinaten ξ, η gegeben, welche der Punct in dieser Ebene besitzt, so wird damit die Lage des Punctes im Raume vollständig bestimmt sein. Es werden dann die Coordinaten x, y, z dieses Punctes folgende sein:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \xi, \\ y = \eta \cos \varphi, \\ z = \eta \sin \varphi. \end{cases}$$

*) Es erstreckt sich demnach jede Meridianebene, was die in ihr angenommenen Achsen ξ, η anbelangt, von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$, hingegen nur von $\eta = 0$ bis $\eta = +\infty$.

Zwischen den Coordinaten ξ, η und zwischen zwei andern Variabeln ϑ, ω mag nun folgende Beziehung festgesetzt werden:

$$(2.)\quad \xi + i\eta = f(\vartheta + i\omega),$$

wo $i = \sqrt{-1}$, und f irgend welche gegebene Function sein soll. Durch Sonderung des Reellen und Imaginären wird diese Formel in zwei Gleichungen zerfallen, die entweder in der Form

$$(3.)\quad \xi = \psi(\vartheta, \omega), \quad \eta = \chi(\vartheta, \omega),$$

oder in der Form

$$(4.)\quad \vartheta = \Psi(\xi, \eta), \quad \omega = X(\xi, \eta)$$

dargestellt werden können. Aus der Abhängigkeit, welche durch (2.) zwischen ξ, η und zwischen ϑ, ω festgesetzt ist, ergiebt sich bekanntlich, dass

$$(5.)\quad \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \eta}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = - \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta},$$

$$(6.)\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = - \frac{\partial \omega}{\partial \xi},$$

mithin auch

$$(7.)\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0$$

ist. *)

Die beiden Gleichungen (4.) stellen, falls man für ϑ, ω irgend welche Constanten einsetzt, zwei Curvensysteme vor, welche beide in der Meridianebene $\xi\eta$ liegen, und von welchen das eine den Parameter ϑ, das andere den Parameter ω besitzt. Und zwar sind diese beiden Curvensysteme, wie man aus (7.) sofort erkennt, unter einander orthogonal.

Durch die Gleichungen (3.) sind demnach die Coordinaten ξ, η der in irgend einer Meridianebene liegenden Puncte ausgedrückt

---

*) Aus (2.) folgt durch Differentiation nach ϑ und ω:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} + i\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} = f'(\vartheta + i\omega),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} + i\frac{\partial \eta}{\partial \omega} = if'(\vartheta + i\omega),$$

folglich:

$$i\left(\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} + i\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + i\frac{\partial \eta}{\partial \omega};$$

und daraus ergeben sich sofort die Relationen (5.). Andererseits kann man der Gleichung (2.) auch folgende Gestalt geben:

$$\vartheta + i\omega = F(\xi + i\eta),$$

und dann ergeben sich in ähnlicher Weise die Relationen (6.), und daraus sofort auch (7.). Die Charakteristik ∂ dient hier und im Folgenden überall zur Bezeichnung der partiellen Differentiation.

durch die Parameter ϑ, ω zweier in dieser Ebene gezogenen orthogonalen Curvensysteme. Substituirt man also diese Werthe von ξ, η in (1.), so wird man drei Gleichungen erhalten

$$(8.)\quad \begin{cases} x = \psi(\vartheta, \omega), \\ y = \chi(\vartheta, \omega) \cdot \cos\varphi, \\ z = \chi(\vartheta, \omega) \cdot \sin\varphi, \end{cases}$$

durch welche die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes ausgedrückt werden durch die Parameter ϑ, ω, φ dreier orthogonaler Flächensysteme, von welchen die beiden ersten Rotationsflächen um die x Achse sind, und von welchen das dritte aus den Meridianebenen dieser Rotationsflächen besteht.

Aus (1.) ergiebt sich

$$\begin{aligned} dx &= d\xi, \\ dy &= d\eta \cdot \cos\varphi - \eta \sin\varphi\, d\varphi, \\ dz &= d\eta \cdot \sin\varphi + \eta \cos\varphi\, d\varphi, \end{aligned}$$

mithin:

$$(9.)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + \eta^2 d\varphi^2.$$

Nun ist

$$d\xi = \frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial\xi}{\partial\omega} d\omega$$

oder mit Hülfe der Relationen (5.):

$$d\xi = \frac{\partial\eta}{\partial\omega} d\vartheta - \frac{\partial\eta}{\partial\vartheta} d\omega,$$

ferner

$$d\eta = \frac{\partial\eta}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial\eta}{\partial\omega} d\omega.$$

Daraus folgt:

$$d\xi^2 + d\eta^2 = \left\{ \left(\frac{d\eta}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2 \right\} \cdot (d\vartheta^2 + d\omega^2).$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$(10.)\quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 = \varrho,$$

so verwandelt sich die Gleichung (9.) in:

$$(11.)\quad dx^2 + dy + dz^2 = \varrho(d\vartheta^2 + d\omega^2) + \eta^2 d\varphi^2.$$

Versteht man unter W irgend welche von x, y, z oder, was dasselbe ist, von ϑ, ω, φ abhängende Function, so ergiebt sich mit Hülfe der vorstehenden Gleichung (11.) für den Differentialausdruck

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

sofort folgende Transformation: *)

$$\varrho\eta \cdot \Delta W = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right),$$

oder, da ϱ und η von φ unabhängig sind:

$$(12.)\quad \varrho\eta \cdot \Delta W = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}.$$

Dieser Transformationsformel kann man eine noch bequemere Gestalt verleihen, wenn man statt W eine andere Function V einführt, nämlich

$$W = \frac{V}{\sqrt{\eta}}$$

setzt. Alsdann nämlich wird

$$\eta\frac{\partial W}{\partial\vartheta} = \sqrt{\eta}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}V,$$

$$\eta\frac{\partial W}{\partial\omega} = \sqrt{\eta}\frac{\partial V}{\partial\omega} - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\frac{\partial\eta}{\partial\omega}V,$$

mithin:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right) = \sqrt{\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} + \left\{\frac{1}{4\eta\sqrt{\eta}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\frac{\partial^2\eta}{\partial\vartheta^2}\right\}V,$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) = \sqrt{\eta}\frac{\partial^2 V}{\vartheta\omega^2} + \left\{\frac{1}{4\eta\sqrt{\eta}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\frac{\partial^2\eta}{\partial\omega^2}\right\}V.$$

Differenzirt man die Relationen (5.) $\frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\eta}{\partial\omega}$, $\frac{\partial\xi}{\partial\omega} = -\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}$ respective nach ω und ϑ, so ergiebt sich $\frac{\partial^2\xi}{\partial\vartheta\partial\omega} = \frac{\partial^2\eta}{\partial\omega^2} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial\vartheta^2}$, d. i.

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial\omega^2} = 0.$$

---

*) Man sehe darüber Jacobi's Mathematische Werke Bd. II. S. 43. Es wird nämlich dort von Jacobi ein Satz bewiesen, der sich in die hier angewandten Bezeichnungen übersetzt so aussprechen lässt:

„Ist

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Theta d\vartheta^2 + \Omega d\omega^2 + \Phi d\varphi^2,$$

„und setzt man ausserdem zur Abkürzung

$$\sqrt{\Theta\Omega\Phi} = P,$$

„so wird:

$$P \cdot \Delta W = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{P}{\Theta}\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{P}{\Omega}\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{P}{\Phi}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right).“$$

Benutzt man diese Relation, und beachtet man ferner, dass

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega}\right)^2 = \varrho$$

gesetzt wurde, so ergiebt sich aus den zuvor aufgestellten Formeln sofort:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\eta \frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\eta \frac{\partial W}{\partial \omega}\right) = \sqrt{\eta}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}\right) + \frac{\varrho}{4\eta\sqrt{\eta}}\, V.$$

Ferner wird, weil $W = \frac{V}{\sqrt{\eta}}$, und η von φ unabhängig ist:

$$\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{\varrho}{\eta\sqrt{\eta}}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Demnach verwandelt sich die Formel (12.) in:

$$\varrho\eta \cdot \Delta W = \sqrt{\eta}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}\right) + \frac{\varrho}{\eta\sqrt{\eta}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{V}{4}\right),$$

oder, wenn man für V seine eigentliche Bedeutung $W \cdot \sqrt{\eta}$ wieder einsetzt, und ausserdem die ganze Gleichung mit $\sqrt{\eta}$ dividirt:

$$(13.) \quad \varrho\sqrt{\eta} \cdot \Delta W = \frac{\partial^2 (W\sqrt{\eta})}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 (W\sqrt{\eta})}{\partial \omega^2} + \frac{\varrho}{\eta^2}\left(\frac{\partial^2 (W\sqrt{\eta})}{\partial \varphi^2} + \frac{W\sqrt{\eta}}{4}\right).$$

Man wird aus der nachfolgenden Untersuchung erkennen, dass die Aufgaben über das Gleichgewicht der Wärme oder der Elektricität für einen von der Rotationsfläche $\vartheta = \text{Const.}$ begrenzten homogenen Körper immer lösbar sind, sobald in der hier aufgestellten Gleichung (13.) der im letzten Gliede vorkommende Factor $\frac{\varrho}{\eta^2}$ nur allein von ϑ, oder nur allein von ω abhängt; ferner, dass die Aufgabe auch dann leicht lösbar ist, wenn der eben genannte Factor eine Summe zweier Glieder ist, von welchen das eine nur ϑ, das andere nur ω enthält.

§. 2.

Einführung der bei Behandlung von Ringflächen zweckmässigen Coordinaten.

Man zeichne in einer Ebene einen Kreis und eine gerade Linie, welche einander weder schneiden noch berühren, und lasse sodann die Ebene um jene gerade Linie rotiren. Dann wird der

Kreis während dieser Bewegung eine ringförmige, d. i. eine in sich zurücklaufende canalförmige Oberfläche beschreiben. Jede in solcher Art entstandene Fläche mag eine Ringfläche genannt werden.

Im Folgenden sollen nun zur Ortsbestimmung eines Punctes im Raume drei Coordinaten λ, ω, φ in Anwendung gebracht werden, welche so beschaffen sind, dass die Gleichung $\lambda = \text{Const.}$ ein System ineinander geschachtelter Ringflächen repräsentirt, während die Gleichungen $\omega = \text{Const.}$ und $\varphi = \text{Const.}$ zwei Flächensysteme darstellen, welche sowohl untereinander als auch zu jenen Ringflächen orthogonal sind.

Es sei eine vertikale Ebene, und in dieser sei eine horizontale gerade Linie AB von der Länge $2a$ gegeben. Die beiden Endpuncte A und B dieser Linie mögen die beiden Pole genannt werden. P sei ein beliebiger Punct in jener Ebene; und von P aus mögen nach den beiden Polen hin die Linien PA und PB gezogen werden. Unter ω soll entweder der Winkel APB selber oder die Ergänzung dieses Winkels zu 2π verstanden werden; und zwar soll ersteres geschehen, falls P oberhalb der Linie AB liegt, letzteres, falls P unterhalb dieser Linie sich befindet. Der Werth von ω wird also in Folge dieser Festsetzung für alle Puncte P, die **oberhalb** AB sich befinden, zwischen 0 und π, und andererseits für alle Puncte P, die **unterhalb** AB sich befinden, zwischen π und 2π liegen.

Alle Puncte P, für welche ω einen gegebenen Werth hat, werden dann in ihrer Gesammtheit ein Stück eines Kreises bilden, nämlich einen Kreisbogen bilden, dessen Endpuncte in A und B liegen. Die Gleichung $\omega = \text{Const.}$ wird also ein System von Kreisbogen darstellen, welche sämmtlich die Linie AB zur gemeinsamen Sehne haben. Nimmt man z. B. $\omega = \frac{\pi}{2}$, so erhält man einen über der Linie AB als Durchmesser stehenden Halbkreis, und zwar einen Halbkreis, welcher oberhalb AB liegt; nimmt man $\omega = \frac{3\pi}{2}$, so erhält man einen unterhalb AB liegenden Halbkreis, nämlich denjenigen, durch welchen der zuvor genannte Halbkreis zu einem vollen Kreise ergänzt wird.

Insbesondere ist, was die verschiedenen Lagen anbelangt, welche der Kreisbogen $\omega = \text{Const.}$ annimmt, sobald man für die Constante andere und andere Werthe substituirt, zu bemerken, dass jener Kreisbogen für $\omega = 0$ unendlich gross ist und oberhalb AB liegt, dass derselbe ferner für $\omega = \pi$ identisch ist mit der begrenzten geraden Linie AB, und dass derselbe endlich für $\omega = 2\pi$ wiederum unendlich gross wird, aber unterhalb AB liegt.

Wir verlängern die Linie AB über A oder über B hinaus, und bezeichnen irgend welchen Punct auf dieser Verlängerung mit M. Denken wir uns nun alle jene Kreisbogen $\omega = \text{Const.}$ construirt, und legen wir sodann von M aus Tangenten an alle jene Bogen, so sind die Contactpuncte dieser Tangenten alle gleich weit von ihrem gemeinsamen Ausgangspuncte M entfernt,*) und liegen also auf einem Kreise, welcher sein Centrum in M hat, und welcher die Bogen $\omega = \text{Const.}$ senkrecht durchschneidet.

Es besitzen nun die Punkte, welche auf der Peripherie des eben genannten, um M beschriebenen Kreises liegen, eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Das gegenseitige Verhältniss der beiden Abstände, welche ein solcher Punct von den beiden Polen A und B hat, besitzt nämlich, welche Lage der Punct auf der Peripherie jenes Kreises auch immer haben mag, stets ein und denselben Werth.**) Bezeichnet man also das Verhältniss dieser

*) Bezeichnet man nämlich für irgend eine von jenen Tangenten den Contactpunct mit P, so ist die Strecke MP mittlere Proportionale zwischen MA und MB, folglich für alle jene Tangenten von gleicher Grösse.

**) Bezeichnet man wiederum irgend einen Punct auf der Peripherie jenes Kreises mit P, so ist, wie bereits bemerkt, MP mittlere Proportionale zwischen MA und MB. Daraus ergiebt sich sofort, dass die beiden Dreiecke MAP und MPB unter einander ähnlich sind; und hieraus folgt:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PM}{MB},$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{MA}{PM},$$

folglich, wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt und die Quadratwurzel zieht:

$$\frac{PA}{PB} = \sqrt{\frac{MA}{MB}}.$$

Demnach hat also in der That, wie oben behauptet wurde, das Verhältniss $\frac{PA}{PB}$ für alle Puncte P, welche auf der Peripherie des um M beschriebenen Kreises liegen, ein und denselben Werth.

beiden Polabstände zu einander mit λ, so ist λ für alle Puncte jenes Kreises constant.

Nimmt man an Stelle von M irgend einen andern, ebenfalls auf der Verlängerung von AB liegenden Punct M', so erhält man, wenn man jetzt von M' aus Tangenten an die Bogen $\omega =$ Const. legt, Contactpuncte, die ihrerseits wiederum auf einem Kreise liegen. Dieser neue Kreis hat sein Centrum in M' und durchschneidet jene Bogen $\omega =$ Const. wiederum unter Winkeln von 90°. Für die Puncte dieses neuen Kreises wird dann das Verhältniss λ wiederum einen — aber einen andern — constanten Werth besitzen.

Die Gleichung $\lambda =$ Const. stellt demnach ein System von Kreisen vor, von denen jeder das Bogensystem $\omega =$ Const. senkrecht durchschneidet. Die Mittelpuncte des Kreissystemes $\lambda =$ Const. liegen sämmtlich auf der horizontalen Symmetrielinie, d. i. auf der nach beiden Seiten hin ins Unendliche verlängerten Linie AB; die Mittelpuncte des Bogensystemes $\omega =$ Const. hingegen liegen auf der vertikalen Symmetrielinie, d. h. auf einer Linie, welche durch die Mitte der Linie AB geht und gegen diese senkrecht steht.

Wir wollen nun, was die Ausmessung des Verhältnisses λ anbelangt, festsetzen, dass λ immer ein ächter Bruch sein soll, nämlich festsetzen, dass unter λ immer derjenige Werth verstanden werden soll, welchen man erhält, wenn man von den beiden Polabständen des betrachteten Punctes den **kleineren** durch den **grösseren** dividirt. Bei dieser Festsetzung wird die Gleichung $\lambda =$ Const. für einen beliebig gegebenen Werth der Constanten immer zwei unter einander gleich grosse Kreise darstellen, deren Centra auf der Linie AB liegen, und respective nach Rechts und nach Links hin gleich weit von der Mitte der Linie AB entfernt sind. Lässt man in der Gleichung $\lambda =$ Const. die Constante bis 1 hin anwachsen, so werden die Radien beider Kreise unendlich gross, nämlich beide Kreise identisch mit der vertikalen Symmetrielinie. Lässt man andererseits die Constante zu 0 hin abnehmen, so werden beide Kreise unendlich klein, nämlich der eine identisch mit dem Pole A, der andere mit dem Pole B.

Unsere vertikale Ebene, in welcher wir bis jetzt fortwährend gezeichnet haben, wird — können wir sagen — durch die ver-

tikale Symmetrielinie in zwei Halbebenen zerlegt, von denen die eine den Pol A, die andere den Pol B in sich enthält. Von diesen beiden Halbebenen wollen wir nun fernerhin nur die eine beibehalten, und zwar diejenige, in welcher der Pol A liegt, die andere Halbebene hingegen ganz ausser Spiel lassen.

Die den Pol A enthaltende und auf der einen Seite von der vertikalen Symmetrielinie begrenzte Halbebene soll später um diese Linie gedreht werden. Demgemäss mag gleich jetzt diese Linie die Rotationsachse und jene Halbebene die Meridianebene genannt werden.

In dieser Meridianebene wird nun durch Angabe von λ nur ein Kreis bestimmt sein. Zwischen einem solchen Kreise und zwischen einem durch Angabe von ω bestimmtem Kreisbogen findet (Fig. 1.) immer nur ein Schnittpunct statt.

Figur 1.

Demnach wird durch gleichzeitige Angabe von λ und ω in unserer Meridianebene nur ein Punct bestimmt werden; und es können daher λ und ω in Anwendung gebracht werden, um den Ort eines Punktes in unserer Meridianebene auf eindeutige Weise zu bestimmen.

Sämmtliche Puncte der Meridianebene wird man erhalten, wenn man für λ alle zwischen 0 und 1, und für ω alle zwischen 0 und 2π liegende Werthe nimmt.

Unsere Meridianebene steht, wie wir angenommen haben, vertikal, und ist auf der einen Seite von einer vertikalen Linie begrenzt, welche wir die Rotationsachse genannt haben. Denken wir uns nun die Meridianebene drehbar um diese Achse, so

werden wir, falls die Lage irgend eines Punctes P im Raume bestimmt werden soll, die Meridianebene um jene Achse so weit drehen, bis sie mit dem gegebenem Puncte P zur Berührung kommt. Alsdann wird die Lage von P vollständig bestimmt sein, wenn man erstens die Coordinaten λ, ω angiebt, welche P in dieser Meridianebene besitzt, und zweitens den Winkel φ angiebt, um welchen die Meridianebene von einer festgesetzten Anfangslage aus gedreht werden musste, bevor sie in die hier betrachtete Lage gelangte.

Jeder Punct im Raume wird sich demnach durch Angabe von λ, ω, φ auf eindeutige Weise bestimmen lassen; und zwar wird man um sämmtliche Puncte des Raumes zu erhalten, für λ alle zwischen 0 und 1, für ω alle zwischen 0 und 2π, und für φ ebenfalls alle zwischen 0 und 2π liegenden Werthe zu nehmen haben.

Die Coordinaten λ, ω, φ, durch welche wir hier die Lage eines Punctes im Raume bestimmen, können als die Parameter von drei orthogonalen Flächensystemen angesehen werden. Die beiden Flächensysteme $\lambda =$ Const. und $\omega =$ Const. sind Rotationsflächen, während das Flächensystem $\varphi =$ Const. aus den gemeinschaftlichen Meridianebenen dieser Rotationsflächen besteht.

Die Gleichung $\lambda =$ Const. stellt ein System in einander geschachtelter Ringflächen vor, nämlich ein System von Ringflächen, deren Meridiancurven aus in einander geschachtelten Kreisen bestehen. Der innerste von diesen Kreisen ist unendlich klein und wird durch den Pol A repräsentirt, während der äusserste derselben unendlich gross ist und mit der Rotationsachse zusammenfällt. Demgemäss ist die innerste von den in einander geschachtelten Ringflächen $\lambda =$ Const. identisch mit derjenigen Kreislinie, welche der Pol A bei der Rotation der Meridianebene beschreibt; diese Kreislinie soll in Zukunft der Polarkreis genannt werden; und andererseits wird die äusserste von jenen Ringflächen alle Puncte umfassen, welche entweder auf der Rotationsachse oder in unendlicher Ferne liegen. Die innerste Ringfläche wird dargestellt durch die Gleichung $\lambda = 0$, die äusserste durch die Gleichung $\lambda = 1$.*)

*) Von Interesse und für die nachfolgenden Untersuchungen nicht ohne Wichtigkeit wird es sein, eine Methode zu kennen, durch welche man bei einer beliebig gegebenen Ringfläche den Polarkreis construiren kann. Man

Die Gleichung ω = Const. stelllt ein System von Kugel-Calotten vor, welche sämmtlich vom Polarkreise eingerandet werden, und welche zu jenen Ringflächen orthogonal sind.

Endlich stellt die Gleichung φ = Const. ein System von Ebenen vor, nämlich das System der Meridianebenen.

Wir wollen nun die Beziehung untersuchen, in welcher unsere Coordinaten λ, ω, φ zu den gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten stehen. Dabei wird es gut sein, wiederum mit der Betrachtung einer einzelnen Meridianebene zu beginnen.

Der Mittelpunct des Polarkreises mag mit O, ferner derjenige Punct, in welchem der Polarkreis von unserer Meridianebene durchschnitten wird mit A, endlich der zu A diametral gegenüberliegende Punct jenes Kreises mit B bezeichnet werden. Wir beziehen nun unsere Meridianebene auf zwei Achsen ξ, η, von welchen die erstere von O aus vertikal in die Höhe geht, also mit der Rotationsachse zusammenfällt, und von welchen die zweite von O nach A hinläuft.*)

Ist P irgend ein Punkt in unserer Meridianebene, und bezeichnen wir seine Abstände nach A und nach B hin mit r und r', ferner die Winkel, unter welchen diese Abstände gegen die Achse η geneigt sind, mit u und u', so ergeben sich für die

---

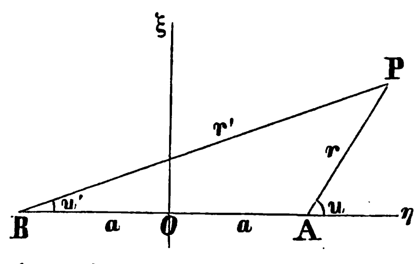
denke sich die Ringfläche in solcher Lage, dass ihre Rotationsachse vertikal steht, und construire die horizontale Symmetrieebene derselben, d. h. diejenige Horizontalebene, durch welche die Ringfläche in zwei einander congruente Hälften zerlegt wird. Der Punct, in welchem diese Ebene und die Rotationsachse einander schneiden, mag der Mittelpunct der Ringfläche genannt werden. Denkt man sich nun um diesen Mittelpunct als Centrum eine Kugelfläche beschrieben, und zwar von solcher Grösse, dass sie die Ringfläche gerade unter 90° durchschneidet, so wird die horizontale Symmetrieebene von dieser Kugelfläche in dem Polarkreise geschnitten werden.

Um also den Polarkreis einer gegebenen Ringfläche zu finden, hat man nur vom Mittelpunct der Ringfläche aus irgend eine Tangente an diese Fläche zu legen. Die Länge dieser Tangente, vom Mittelpunct bis zum Berührungspunct gerechnet, wird dann der Radius des Polarkreises sein.

*) Unsere Meridianebene erstreckt sich dann, da sie auf der einen Seite von der Rotationsachse begrenzt gedacht werden soll, in vertikaler Richtung von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$, in horizontaler Richtung hingegen nur von $\eta = 0$ bis $\eta = +\infty$.

rechtwinkligen Coordinaten ξ, η unseres Punktes P folgende Ausdrücke (Fig. 2.):

Figur 2.



$$\xi = r \sin u, \qquad \xi = r' \sin u',$$
$$\eta - a = r \cos u, \qquad \eta + a = r' \cos u',$$

wo a den Radius des Polarkreises vorstellt. Hieraus folgt sofort:

$$(1.) \quad \eta + i\xi - a = r \cdot e^{iu}, \qquad \eta + i\xi + a = r' \cdot e^{iu'},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und $e = 2{,}718 \ldots$ ist.

Nun ist, wenn wir die vorhin besprochenen neuen Coordinaten unseres Punctes P mit λ, ω bezeichnen:

$$\frac{r}{r'} = \lambda, \qquad u - u' = \omega.$$

Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich, falls man die beiden Formeln (1.) durch einander dividirt:

$$(2.) \quad \frac{\eta + i\xi - a}{\eta + i\xi + a} = \lambda \cdot e^{i\omega}$$

oder wenn man $-i$ statt i setzt:

$$\frac{\eta - i\xi - a}{\eta - i\xi + a} = \lambda \cdot e^{-i\omega},$$

d. i.

$$(2\text{ a.}) \quad \frac{(\xi + i\eta) - ia}{(\xi + i\eta) + ia} = \lambda \cdot e^{-i\omega}.$$

Führt man an Stelle von λ den natürlichen Logarithmus von $\frac{1}{\lambda}$ ein, setzt man nämlich

$$\log \frac{1}{\lambda} = \vartheta,$$

mithin

$$\lambda = e^{-\vartheta},$$

so verwandelt sich unsere Formel (2.) oder (2 a.) in:

$$(2\text{ b.}) \quad \frac{(\xi + i\eta) - ia}{(\xi + i\eta) + ia} = e^{-(\vartheta + i\omega)}.$$

Daraus sieht man, dass das Binom $(\xi + i\eta)$ nicht von den beiden Argumenten ϑ und ω, sondern nur von dem einen Argumente $(\vartheta + i\omega)$ abhängt. Demnach fallen die hier eingeführten Coordinaten ϑ, ω geradezu in die Categorie der in §. 1 behandelten; und es werden sich also die dort ausgeführten allgemeinen Transformationen unmittelbar auf die gegenwärtigen Coordinaten ϑ, ω in Anwendung bringen lassen.

Aus (2.) ergiebt sich:

$$(3.)\quad \eta + i\xi = a\frac{1 + \lambda e^{i\omega}}{1 - \lambda e^{i\omega}},$$

und hieraus durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

$$(4.)\quad \begin{cases} \xi = a \cdot \dfrac{2\lambda \sin \omega}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}, \\ \eta = a \cdot \dfrac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}, \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung (3.) mit derjenigen, die sich aus ihr selber durch Vertauschung von i mit $-i$ ergiebt, so findet man:

$$(5.)\quad \xi^2 + \eta^2 = a^2 \frac{1 + 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}.$$

Ferner ergiebt sich aus (3.):

$$\frac{\partial(\eta + i\xi)}{\partial\omega} = a \cdot \frac{2\lambda e^{i\omega}}{(1 - \lambda e^{i\omega})^2},$$

und, wenn man diese Gleichung mit derjenigen multiplicirt, die sich aus ihr selber durch Vertauschung von i mit $-i$ ergiebt:

$$(6.)\quad \frac{\partial(\eta + i\xi)}{\partial\omega} \cdot \frac{\partial(\eta - i\xi)}{\partial\omega} = a^2 \cdot \frac{4\lambda^2}{(1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\right)^2,$$

oder, wenn man beachtet, dass nach (5. Seite 2) $\dfrac{\partial\xi}{\partial\omega} = -\dfrac{\partial\eta}{\partial\vartheta}$ ist, gleich

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2.$$

Demnach ergiebt sich für die in §. 1 (auf Seite 3) eingeführte Grösse ϱ hier folgender Werth:

$$(7.)\quad \varrho = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right)^2 = \frac{4a^2\lambda^2}{(1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}.$$

Und nunmehr folgt aus (4.) und (7.) sofort:

$$(8.)\quad \frac{\varrho}{\eta^2} = \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2.$$

Wir führen nun ein dreiachsiges, rechtwinkliges Coordinatensystem (x, y, z) ein. Die Achse x mag mit der Rotationsachse ξ zusammenfallen. Die beiden andern Achsen y und z mögen durch irgend zwei aufeinander senkrechte Radien des Polarkreises dargestellt sein. Unter φ mag der Winkel verstanden werden, unter welchem die variable Meridianebene $\xi\eta$ gegen die feste Meridianebene xy geneigt ist.

Alsdann erhält man, wenn man die Coordinaten irgend eines Punktes P mit x, y, z oder mit ξ, η, φ oder endlich mit λ, ω, φ bezeichnet, zwischen diesen Coordinaten folgende Relationen:

$$(9.)\quad \begin{cases} x = \xi, \\ y = \eta \cos\varphi, \\ z = \eta \sin\varphi, \end{cases}$$

und hieraus mit Hülfe von (4.):

$$(10.)\quad \begin{cases} x = a \cdot \dfrac{2\lambda \sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}, \\[2ex] y = a \cdot \dfrac{(1-\lambda^2)\cdot\cos\varphi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}, \\[2ex] z = a \cdot \dfrac{(1-\lambda^2)\cdot\sin\varphi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}. \end{cases}$$

Für das Quadrat des Linienelements: $dx^2 + dy^2 + dz^2$ wurde auf Seite 3 gefunden:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \varrho(d\vartheta^2 + d\omega^2) + \eta^2 d\varphi^2.$$

Demnach wird, wenn man die in (4.) und (7.) für η und ϱ gefundenen Werthe substituirt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4a^2\lambda^2(d\vartheta^2 + d\omega^2) + a^2(1-\lambda^2)^2 d\varphi^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)^2},$$

oder weil $\vartheta = \log\dfrac{1}{\lambda}$, mithin $d\vartheta = -\dfrac{d\lambda}{\lambda}$ ist:

$$(11.)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(2a\,d\lambda)^2 + (2a\lambda\,d\omega)^2 + (a(1-\lambda^2)\,d\varphi)^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)^2}.$$

Bezeichnet ferner W irgend welche von x, y, z oder von λ, ω, φ abhängende Function, so ist auf Seite 5 für den Differentialausdruck

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

folgende Transformation gefunden:

$$\varrho\sqrt{\eta}\cdot\Delta W = \frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{\partial\omega^2} + \frac{\varrho}{\eta^2}\left(\frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{\partial\varphi^2} + \frac{W\sqrt{\eta}}{4}\right).$$

Somit ergiebt sich hier, wenn man für $\frac{\varrho}{\eta^2}$ den Werth (8.) substituirt und gleichzeitig $\vartheta = \log\frac{1}{\lambda} = -\log\lambda$ setzt:

$$(12.)\quad \varrho\sqrt{\eta}\cdot\Delta W = \frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{(\partial\log\lambda)^2} + \frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{\partial\omega^2} + \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{\partial\varphi^2} + \frac{W\sqrt{\eta}}{4}\right).$$

Das Glied $\frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{(\partial\log\lambda)^2}$ würde hier, ausführlicher dargestellt, folgendermassen lauten:

$$\frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{(\partial\log\lambda)^2} = \lambda^2\frac{\partial^2 W\sqrt{\eta}}{\partial\lambda^2} + \lambda\frac{\partial W\sqrt{\eta}}{\partial\lambda}.$$

§. 3.

Entwickelung der reciprocen Entfernung zweier Puncte.

Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen, ferner λ, ω, φ und $\lambda_1, \omega_1, \varphi_1$ die neuen Coordinaten irgend zweier Punkte P und P_1. Ausserdem werde gesetzt:

$$\begin{aligned} x &= \xi, & x_1 &= \xi_1, \\ y &= \eta\cos\varphi, & y_1 &= \eta_1\cos\varphi_1, \\ z &= \eta\sin\varphi, & z_1 &= \eta_1\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

Dann ist:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 =$$
$$= (\xi^2+\eta^2) + (\xi_1^2+\eta_1^2) - 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1\cos\varphi-\varphi_1),$$

also nach (4.) und (5.) Seite 13:

$$= a^2\left(\frac{1+2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} + \frac{1+2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2} -\right.$$
$$\left. - 2\frac{4\lambda\lambda_1\sin\omega\sin\omega_1 + (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\varphi-\varphi_1}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2)}\right).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man alle Glieder auf gleichen Nenner bringt und zur Abkürzung

$$(1.)\quad \begin{cases} \omega-\omega_1 = \Omega, \\ \varphi-\varphi_1 = \Phi \end{cases}$$

setzt:

$$(2.)\quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 =$$
$$= 2a^2 \frac{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2)}.$$

Diese Formel stellt das Quadrat der Entfernung irgend zweier Puncte P, P_1 vor. Wir wollen von dieser Formel zunächst eine Anwendung machen, um die Entfernung eines beliebig gegebenen Punctes P von drei gewissen Puncten O, A, B zu berechnen. Das wird dadurch geschehen, dass wir in unserer Formel für P den beliebig gegebenen Punct, für P_1 hingegen einen der drei Puncte O, A, B nehmen.

Unter O soll der Anfangspunct des Coordinatensystemes (x, y, z) oder, was dasselbe ist, der Mittelpunct des Polarkreises verstanden werden. Ferner sollen A und B zwei Puncte sein, welche auf der Peripherie des Polarkreises liegen, und zwar A derjenige, welcher dem beliebig gegebenen Puncte P am Nächsten liegt, B derjenige, welcher von P am Weitesten entfernt ist.

Bezeichnet man die Coordinaten von P mit λ, ω, φ, und die Coordinaten eines unter den drei Puncten O, A, B mit λ_1, ω_1, φ_1, so ist:

für O:	$\lambda_1 = 1,$	$\omega_1 = \pi,$	$\varphi_1 =$ unbestimmt,
für A:	$\lambda_1 = 0,$	$\omega_1 =$ unbest.,	$\varphi_1 = \varphi,$
für B:	$\lambda_1 = 0,$	$\omega_1 =$ unbest.,	$\varphi_1 = \varphi + \pi.$

Substituirt man diese Werthe für λ_1, ω_1, φ_1 in die Formel (2.), so ergeben sich für die in Rede stehenden Entfernungen PO, PA, PB folgende Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} PO = \dfrac{a\sqrt{1+2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}, \\ PA = \dfrac{2a\lambda}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}, \\ PB = \dfrac{2a}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}, \end{cases}$$

Diese Formeln beziehen sich auf einen Punct P mit den Coordinaten λ, ω, φ. Aehnliche Formeln können wir für jeden beliebigen andern Punct P_1 mit den Coordinaten λ_1, ω_1, φ_1 aufstellen. Es wird nämlich:

$$(4.)\quad \begin{cases} P_1O = \dfrac{a\sqrt{1+2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}{\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}, \\ P_1A_1 = \dfrac{2a\lambda_1}{\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}, \\ P_1B_1 = \dfrac{2a}{\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}, \end{cases}$$

wo A_1, B_1 wiederum zwei Punkte auf der Peripherie des Polarkreises sind, und zwar A_1 derjenige, welcher P_1 am Nächsten liegt, B_1 derjenige, welcher von P_1 am Weitesten entfernt ist.

Wir kehren nun zu unserer allgemeinen Formel (2.) zurück. Bezeichnen wir den reciprocen Werth der Entfernung irgend zweier Puncte P, P_1 mit T, setzen wir also

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}},$$

so verwandelt sich jene Formel in

$$T = \frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\;\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}{\sqrt{2a^2}\;\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2)-4\lambda\lambda_1\cos\Omega-(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}.$$

Verstehen wir demnach unter $\mathfrak{T}$ den Ausdruck

$$(5.)\quad \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}\;\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2)-4\lambda\lambda_1\cos\Omega-(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}},$$

so wird:

$$(6.)\quad T = \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\;\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}\;\mathfrak{T}.$$

Es handelt sich nun darum, die reciproce Entfernung T in eine Reihe zu entwickeln. Und zu diesem Zwecke wollen wir versuchen, den Ausdruck $\mathfrak{T}$ nach den Cosinus der Vielfachen von Ω und Φ zu entwickeln.

Zunächst bedarf es einer Untersuchung, ob eine solche Entwickelung des Ausdruckes $\mathfrak{T}$ überhaupt möglich ist. Die Entscheidung hierüber hängt ab von der Natur des Ausdruckes $\mathfrak{T}$. Demnach wird es sehr wichtig sein, eine einfache geometrische Bedeutung dieses Ausdruckes zu finden.

Nun ist nach (6.)

$$(7.)\quad \mathfrak{T} = \frac{T}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\;\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}.$$

Bezeichnet man wiederum die beiden Puncte $(\lambda, \omega, \varphi)$ und $(\lambda_1, \omega_1, \varphi_1)$, auf welche sich die reciproce Entfernung T bezieht,

mit P und P_1, und versteht man ausserdem unter B und B_1 diejenigen beiden Puncte des Polarkreises, welche respective von P und von P_1 am Weitesten entfernt sind, so ist nach (3.) und (4):

$$PP_1 = \frac{1}{T},$$

$$PB = \frac{2a}{\sqrt{1-2\lambda \cos \omega + \lambda^2}},$$

$$P_1B_1 = \frac{2a}{\sqrt{1-2\lambda_1 \cos \omega_1 + \lambda_1^2}}.$$

Somit verwandelt sich (7.) in:

$$(8.)\quad \mathfrak{T} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{PB \cdot P_1B_1}{PP_1};$$

eine Formel, in welcher die geometrische Bedeutung des Ausdruckes $\mathfrak{T}$ klar dargelegt ist, in welcher nämlich angegeben ist, wie der Werth dieses Ausdruckes von der Lage der beiden Puncte P, P_1 abhängt.

Man erkennt aus dieser Formel sofort, dass $\mathfrak{T}$ nur in zwei Fällen unendlich gross wird, nämlich nur dann, wenn entweder P mit P_1 zusammenfällt, oder wenn gleichzeitig beide Puncte, sowohl P als auch P_1 in unendliche Ferne rücken.*)

Zur Bestimmung der Lage eines Punctes im Raume dienen bei uns die Coordinaten λ, ω, φ. Durch λ wird die Ringfläche bestimmt, auf welcher der Punct liegt, und durch ω und φ wird der Ort des Punctes auf dieser Ringfläche bestimmt.

Der Parameter λ der Ringfläche liegt immer zwischen 0 und 1; und zwar ist der Meridiankreis der Ringfläche kleiner oder grösser, je nachdem λ einen kleineren oder grösseren Werth besitzt. Lässt man λ bis 0 hin abnehmen, so wird der Meridian-

*) Rückt nämlich nur einer, z. B. nur P in unendliche Ferne, während P_1 in der Endlichkeit bleibt, so wird

$$\frac{PB}{PP_1} = 1,$$

mithin

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{4a^2} \cdot P_1B_1;$$

es hat also $\mathfrak{T}$ alsdann einen endlichen Werth.

kreis kleiner und kleiner werden, bis er sich schliesslich zu einem Punct zusammenzieht, und zwar zu einem Punkt, welcher auf der Peripherie des Polarkreises liegt. Lässt man andererseits λ bis zu 1 hin anwachsen, so wird der Meridiankreis der Ringfläche grösser und grösser werden, bis er sich schliesslich in eine gerade Linie verwandelt, nämlich in diejenige gerade Linie, durch welche die Rotationsachse unseres Ringflächen-Systemes dargestellt wird.

Lässt man also λ bis 0 hin abnehmen, so wird sich die Ringfläche mehr und mehr verengern, bis sie schliesslich identisch wird mit dem Polarkreise; und lässt man andererseits λ bis 1 hin anwachsen, so wird sich die Ringfläche mehr und mehr erweitern, bis sie schliesslich alle Puncte umfasst, welche entweder auf der Rotationsachse oder in unendlicher Ferne liegen.

Wir wollen nun, was die Coordinaten λ, ω, φ, λ_1, ω_1, φ_1 unserer beiden Puncte P, P_1 anbelangt, festsetzen, dass stets

$$(9.)\quad 0 \leqq \lambda < \lambda_1 \leqq 1$$

sein solle. Dann wird P auf einer engeren, und P_1 auf einer weiteren Ringfläche liegen.

Zufolge (9.) kann λ niemals gleich λ_1 werden, also P mit P_1 niemals zusammenfallen. Ferner folgt aus den in (9.) gemachten Festsetzungen, dass allerdings λ_1 bis 1 hin anwachsen kann, dass aber λ immer kleiner als 1 bleiben muss. Demgemäss kann zufolge jener Festsetzungen allerdings P_1, niemals aber P in unendliche Ferne rücken.

Nun hatten wir früher gefunden, dass der Ausdruck $\mathfrak{T}$ nur dann unendlich gross wird, wenn entweder P mit P_1 zusammenfällt, oder wenn gleichzeitig beide Puncte, P sowohl als auch P_1, in unendliche Ferne rücken. Somit sehen wir, dass durch Festsetzung der Relationen (9.) diejenigen beiden Fälle, in welchen $\mathfrak{T}$ unendlich gross wird, ausgeschlossen werden. Also:

Setzt man in Bezug auf die Grösse von λ und λ_1 die Relationen (9.) fest, so bleibt der Ausdruck:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1\cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}$$

fortwährend endlich und stetig. Nimmt man also für λ, λ_1 irgend zwei constante Werthe, welche innerhalb der durch

(9.) festgestellten Grenzen liegen, so wird $\mathfrak{T}$ eine von den Variablen Ω, Φ abhängende Function sein, welche für alle Werthe dieser Variablen endlich und stetig bleibt.

Unter Voraussetzung der Relationen (9.) ist daher $\mathfrak{T}$ in eine convergente Reihe entwickelbar, welche nach den Cosinus der Vielfachen von Ω fortschreitet. Gleichzeitig werden dann die von Φ abhängenden Coefficienten dieser Reihe Functionen sein, welche für alle Werthe der Variablen Φ endlich und stetig sind, also Functionen sein, welche ihrerseits wiederum in convergente nach den Cosinus der Vielfachen von Φ fortschreitende Reihen entwickelbar sind. Somit ergiebt sich:

Unter Voraussetzung der Relationen (9.) ist der Ausdruck $\mathfrak{T}$ darstellbar durch eine unendliche Doppelreihe von folgender Form:

$$(10.) \quad \mathfrak{T} = \sum_p \sum_q F_p^q \cdot \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi,$$

in welcher die Coefficienten F_p^q nur von λ und λ_1 abhängig sind.

Es handelt sich nun darum, diese Entwickelung (10.) wirklich auszuführen. Und zu diesem Zwecke werden wir uns zunächst eine Differentialgleichung verschaffen, welcher der Ausdruck $\mathfrak{T}$ Genüge leistet.

Nach (6.) ist

$$T = \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}\ \mathfrak{T},$$

Ferner ist nach Seite 13:

$$\sqrt{\eta} = \frac{\sqrt{a}\ \sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}};$$

somit ergiebt sich:

$$(11.) \quad T\sqrt{\eta} = \sqrt{a}\ \sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}\ \sqrt{1-\lambda^2}\ \mathfrak{T}.$$

Betrachten wir den Punct P als beweglich, und P_1 als fest, d. h. betrachten wir x, y, z, λ, ω, φ als variable, und x_1, y_1, z_1, λ_1, ω_1, φ_1 als constante Grössen, so genügt die reciproce Entfernung T bekanntlich der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

d. i. der Gleichung:

$$\Delta T = 0.$$

Demnach muss (zufolge (12.) Seite 15) $T\sqrt{\eta}$ der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 T\sqrt{\eta}}{(\partial \log \lambda)^2} + \frac{\partial^2 T\sqrt{\eta}}{\partial\omega^2} + \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 T\sqrt{\eta}}{\partial\varphi^2} + \frac{T\sqrt{\eta}}{4}\right) = 0$$

Genüge leisten. Nun ist zufolge (11.) der Ausdruck $T\sqrt{\eta}$ von dem Ausdruck $\mathfrak{T}\sqrt{1-\lambda^2}$ nur durch einen constanten, nämlich nur durch einen von λ_1 und ω_1 abhängigen Factor verschieden. Für $\mathfrak{T}\sqrt{1-\lambda^2}$ muss daher eben dieselbe Differentialgleichung gelten; d. h. es muss

$$(12.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\partial^2 \sqrt{1-\lambda^2}\cdot\mathfrak{T}}{(\partial \log \lambda)^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\omega^2} + \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\varphi^2} + \frac{\mathfrak{T}}{4}\right) = 0$$

sein.

Betrachtet man nun andererseits P_1 als beweglich, und P als fest, so ergiebt sich in ganz ähnlicher Weise, dass auch folgende Differentialgleichung stattfinden muss:

$$(13.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \frac{\partial^2 \sqrt{1-\lambda_1^2}\cdot\mathfrak{T}}{(\partial \log \lambda_1)^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\omega_1^2} + \left(\frac{2\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\varphi_1^2} + \frac{\mathfrak{T}}{4}\right) = 0.$$

In dem Ausdruck $\mathfrak{T}$ (5.) kommen die Grössen ω, φ, ω_1, φ_1 nur in sofern vor, als die Differenzen $\omega - \omega_1 = \Omega$ und $\varphi - \varphi_1 = \Phi$ darin enthalten sind. Demnach lassen sich die eben aufgestellten Differentialgleichungen (12.) und (13.) auch so schreiben:

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot \dfrac{\partial^2 \sqrt{1-\lambda^2}\cdot\mathfrak{T}}{(\partial \log \lambda)^2} + \dfrac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Omega^2} + \left(\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Phi^2} + \dfrac{\mathfrak{T}}{4}\right) = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \cdot \dfrac{\partial^2 \sqrt{1-\lambda_1^2}\cdot\mathfrak{T}}{(\partial \log \lambda_1)^2} + \dfrac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Omega^2} + \left(\dfrac{2\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Phi^2} + \dfrac{\mathfrak{T}}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Setzt man nun hier für $\mathfrak{T}$ seine Entwickelung ein:

$$(15.)\quad \mathfrak{T} = \sum_p \sum_q F_p^q \cdot \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi,$$

so ergiebt sich, dass die Function F_p^q — sie mag der Kürze wegen mit F bezeichnet werden — den beiden Differentialgleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \dfrac{\partial^2 \cdot \sqrt{1-\lambda^2}\cdot F}{(\partial \log \lambda)^2} = p^2 F + (4q^2 - 1)\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 F, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \dfrac{\partial^2 \cdot \sqrt{1-\lambda_1^2}\cdot F}{(\partial \log \lambda_1)^2} = p^2 F + (4q^2 - 1)\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda_1^2}\right)^2 F \end{cases}$$

Genüge leistet.

Ausser diesen Differentialgleichungen lässt sich in Betreff der Functionen F_p^q leicht noch eine andere Eigenschaft nachweisen. Man kann die in der Entwickelung (15.) vorkommenden Glieder, jenachdem die Stellenzahlen p, q gleich Null oder von Null verschieden sind, in folgende vier Gruppen bringen:

I.) F_0^0,

II.) $F_\pi^0 \cdot \cos \pi\Omega$,

III.) $F_0^\varkappa \cdot \cos \varkappa\Phi$,

IV.) $F_\pi^\varkappa \cdot \cos \pi\Omega \cdot \cos \varkappa\Phi$,

wo π und $\varkappa$ Zahlen vorstellen sollen, welche von Null verschieden sind. — Aus der Bedeutung von $\mathfrak{T}$ (5.) erkennt man sofort, dass dieser Ausdruck $\mathfrak{T}$ für $\lambda = 0$ von Ω, und für $\lambda_1 = 1$ von Φ unabhängig wird. Demnach müssen auch in der Entwicklung von $\mathfrak{T}$ (15.) für $\lambda = 0$ alle mit Ω, und für $\lambda_1 = 1$ alle mit Φ behafteten Glieder verschwinden. Also:

(17.) Die Functionen F_π^0 und $F_\pi^\varkappa$ verschwinden für $\lambda = 0$; die Functionen $F_0^\varkappa$ und $F_\pi^\varkappa$ verschwinden für $\lambda_1 = 1$.

Es handelt sich nun darum, mit Hülfe der Differentialgleichungen (16.) und mit Hülfe der Eigenschaften (17.) die von λ und λ_1 abhängenden Functionen F_p^q wirklich zu finden. Zunächst werden wir mit Hülfe von (16.) und (17.) darthun, dass jede dieser Functionen das Product zweier Factoren ist, von welchen der eine nur λ, der andere nur λ_1 enthält.

Da die Functionen F_p^q den Differentialgleichungen (16.) Genüge leisten, so ergiebt sich zunächst, dass jede derselben die Form besitzen muss:

$$(18.) \quad F_p^q = u(\lambda)\, v(\lambda_1) + U(\lambda)\, V(\lambda_1),$$

wo $u(x)$, $U(x)$ sowohl, als auch $v(x)$, $V(x)$ particuläre Integrale der Gleichung:

$$(19.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial^2 \sqrt{1-x^2} \cdot F}{(\partial \log x)^2} = p^2 F + (4q^2 - 1) \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2 F$$

sind.

Die Functionen F_π^q, d. i. die Functionen F_π^0 und $F_\pi^\varkappa$ verschwinden nach (17.) für $\lambda = 0$, und sind also von λ und λ_1 in solcher Weise abhängig, dass sie, welches auch der Werth von

λ_1 sein mag, immer verschwinden, sobald man nur $\lambda = 0$ setzt. Bezeichnet man also wie in (18.) den Werth dieser Functionen F_π^q mit

$$(20.)\quad F_\pi^q = u(\lambda)\, v(\lambda_1) + U(\lambda)\, V(\lambda_1),$$

so muss, welches auch der Werth von λ_1 sein mag, immer

$$u(0)\, v(\lambda_1) + U(0)\, V(\lambda_1) = 0$$

sein. Daraus folgt, dass der Quotient

$$\frac{V(\lambda_1)}{v(\lambda_1)}$$

einen constanten, nämlich einen von λ und λ_1 unabhängigen Werth hat. Bezeichnet man diesen mit C, so wird:

$$V(\lambda_1) = Cv(\lambda_1),$$

mithin, was die Formel (20.) anbelangt:

$$(21.)\quad F_\pi^q = v(\lambda_1) \left\{ u(\lambda) + CU(\lambda) \right\}.$$

Somit ist also nachgewiesen, dass jedwede unter den Functionen F_π^0 und $F_\pi^\varkappa$ das Product zweier Factoren ist, von denen der eine $v(\lambda_1)$ nur λ_1, und der andere $u(\lambda) + CU(\lambda)$ nur λ enthält. Jeder von diesen beiden Factoren ist übrigens, wie beiläufig bemerkt werden mag, ein particuläres Integral der Gleichung (19.). Denn $v(x)$ sowol, als auch $u(x) + CU(x)$ werden jener Gleichung Genüge leisten.

Zu ganz demselben Resultat gelangt man nun andererseits auch in Betreff der Functionen $F_p^\varkappa$ d. i. in Betreff der Functionen $F_0^\varkappa$ und $F_\pi^\varkappa$. Setzt man nämlich wiederum wie in (18.):

$$F_p^\varkappa = u(\lambda)\, v(\lambda_1) + U(\lambda)\, V(\lambda_1),$$

und beachtet man, dass diese Functionen $F_p^\varkappa$ zufolge (17.) für $\lambda_1 = 1$ verschwinden, so ergiebt sich:

$$u(\lambda)\, v(1) + U(\lambda)\, V(1) = 0,$$

und daraus folgt, dass der Quotient

$$\frac{U(\lambda)}{u(\lambda)}$$

einen constanten Werth haben muss. Bezeichnet man diesen mit C, so ergiebt sich

$$(22.)\quad F_p^\varkappa = u(\lambda) \left\{ v(\lambda_1) + CV(\lambda_1) \right\},$$

d. h. jede der Functionen $F_0^\varkappa$, $F_\pi^\varkappa$ ist das Product zweier Factoren, von denen der eine nur λ, der andere nur λ_1 enthält.

Die Formeln (21.) und (22.) zusammengenommen beziehen sich auf sämmtliche Functionen F_p^q mit alleiniger Ausnahme von F_0^0. Wir wollen nun schliesslich nachweisen, dass von F_0^0 ebenfalls dasselbe gilt, dass nämlich F_0^0 ebenfalls das Product zweier Factoren ist, von denen der eine nur λ, der andere nur λ_1 enthält.

Zufolge (18.) können wir setzen:

$$(23.)\quad F_0^0 = u(\lambda)\, v(\lambda_1) + U(\lambda)\, V(\lambda_1),$$

wo $u(x)$, $U(x)$, und ebenso auch $v(x)$, $V(x)$ particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$(24.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{1-x^2}\cdot F}{(\partial \log x)^2} + \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2 F = 0$$

sind. Diese Differentialgleichung mag im Folgenden mit $[F, x] = 0$ bezeichnet werden.

Nun sind F_p^q die Coefficienten in der Entwickelung:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1{}^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1{}^2)\cos\Phi}} =$$
$$= \sum_p \sum_q F_p^q \cdot \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi .$$

Integrirt man hier auf beiden Seiten nach Ω und Φ, und zwar jedesmal zwischen den Grenzen 0 und 2π, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{d\Omega\ d\Phi}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1{}^2) - 4\lambda\lambda_1\cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1{}^2)\cos\Phi}} = 4\pi^2\cdot F_0^0 .$$

Substituirt man nun für F_0^0 auf der rechten Seite den Werth (23.), und setzt man, nachdem solches geschehen, zuerst $\lambda = 0$, sodann zweitens $\lambda_1 = 1$, so erhält man successive die beiden Formeln:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{d\Omega\ d\Phi}{\sqrt{(1+\lambda_1{}^2) - (1-\lambda_1{}^2)\cos\Phi}} = 4\pi^2\cdot\left\{u(0)\cdot v(\lambda_1) + U(0)\cdot V(\lambda_1)\right\},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{d\Omega\ d\Phi}{\sqrt{2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\Omega}} = 4\pi^2\cdot\left\{u(\lambda)\cdot v(1) + U(\lambda)\cdot V(1)\right\}.$$

Diesen beiden Formeln kann man, falls man für λ, λ_1 den Buchstaben x setzt, folgende Gestalt geben:

$$Au(x) + BU(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{\sqrt{1 - 2x\cos\Omega + x^2}},$$

$$Cv(x) + DV(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{\sqrt{\sin^2\frac{\Phi}{2} + x^2\cos^2\frac{\Phi}{2}}},$$

wo A, B, C, D Constante sind. Da $u(x)$, $U(x)$, $v(x)$, $V(x)$ particuläre Integrale der in (24.) angegebenen Differentialgleichung $[F, x] = 0$ sind, so gilt gleiches auch von den Aggregaten $Au(x) + BU(x)$ und $Cv(x) + DV(x)$.

Die beiden Functionen

$$(25.)\quad \begin{cases} w(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - 2x\cos\Theta + x^2}}, \\ W(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + x^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}} \end{cases}$$

sind demnach particuläre Integrale der in (24.) angegebenen Differentialgleichung $[F, x] = 0$.

F_0^0 ist eine von λ und λ_1 abhängende Function, welche gleichzeitig sowohl der Differentialgleichung $[F, \lambda] = 0$, als auch der Differentialgleichung $[F, \lambda_1] = 0$ Genüge leistet. Nun sind $w(\lambda)$ und $W(\lambda)$ zwei particuläre Integrale für $[F, \lambda] = 0$, mithin ist, falls man unter C und D irgend welche von λ unabhängige Grössen versteht:

$$Cw(\lambda) + DW(\lambda)$$

das allgemeine Integral dieser Gleichung. Folglich muss, weil F_0^0 dieser Gleichung Genüge leistet, F_0^0 die Form haben:

$$F_0^0 = Cw(\lambda) + DW(\lambda),$$

wo C und D unabhängig von λ sind, also nur noch λ_1 enthalten. Also:

$$(26.)\quad F_0^0 = w(\lambda)\,r(\lambda_1) + W(\lambda)\,R(\lambda_1).$$

Uebrigens müssen die hier vorkommenden nur von λ_1 abhängenden Functionen $r(\lambda_1)$ und $R(\lambda_1)$ particuläre Integrale der Differentialgleichung $[F, \lambda_1] = 0$ sein, weil F_0^0 dieser Differentialgleichung Genüge leistet.

Wir haben früher gesehen, dass der Ausdruck $\mathfrak{T}$ einen endlichen Werth behält, wenn man λ bis 0 hin abnehmen lässt. Gleiches muss demnach auch von allen in der Entwickelung von $\mathfrak{T}$ auftretenden Coefficienten F_p^q, mithin auch von F_0^0 gelten. Von den beiden in (26.) vorkommenden Functionen $w(\lambda)$ und $W(\lambda)$ wird aber, wie man aus (25.)

erkennt *), die letztere für $\lambda = 0$ unendlich gross. Demnach kann in F_0^0 ein mit $W(\lambda)$ behaftetes Glied nicht vorkommen. Und es muss sich also die Formel (26.) reduciren auf

$$(27.)\quad F_0^0 = w(\lambda) \cdot r(\lambda_1),$$

d. h. F_0^0 wird, ebenso wie alle übrigen Functionen F_p^q, das Product zweier Factoren sein, von welchen der eine nur λ, der andere nur λ_1 enthält.

Also:

Der Ausdruck

$$(28.)\quad \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}$$

kann in eine Reihe von folgender Form entwickelt werden:

$$(29.)\quad \mathfrak{T} = \sum_p\sum_q C_p^q \cdot J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(\lambda_1) \cdot \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi,$$

wo die $J_p^q(\lambda)$ allein von λ, die $A_p^q(\lambda_1)$ allein von λ_1 abhängen, und wo die C_p^q Constante sind.

Um diese Functionen J und A, sammt den Constanten C, wirklich zu bestimmen, bediene ich mich eines Hülfssatzes, welcher so lautet:

Hülfssatz. „Sind $U = U(x)$ und $V = V(x)$ irgend zwei „von x abhängende Functionen, von welchen die letztere für „$x = x_0$ verschwindet, während die erstere für $x = x_0$ von „Null verschieden bleibt, so ist der Werth, welchen das „Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \nu\Theta \cdot d\Theta}{V^\nu \cdot (U - V\cos\Theta)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

*) Für $\lambda = 0$ wird

$$W(0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sin\frac{\Theta}{2}}$$

Nun ist das unbestimmte Integral

$$\int \frac{d\Theta}{\sin\frac{\Theta}{2}} = 2\log \operatorname{tg}\frac{\Theta}{4} + \text{Const.}$$

Dieses wird aber für $\Theta = 0$, und ebenso auch für $\Theta = 2\pi$ unendlich gross. Demnach ist der Werth von $W(0)$ entweder unendlich gross oder von unbestimmter Grösse.

„für $x = x_0$ annimmt, gleich

$$\frac{\Delta_n^\nu}{\left(U(x_0)\right)^{\frac{2n+2\nu+1}{2}}},$$

„wo Δ_n^ν den Werth besitzt:

$$\Delta_n^\nu = \frac{2n+1 \cdot 2n+3 \cdot \cdots \cdot 2n+2\nu-1}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2\nu} \cdot \frac{2\pi}{2^\nu}.$$

„Die Werthe von Δ_n^0, Δ_n^1, Δ_n^2 sind demnach z. B. folgende:

$$\Delta_n^0 = 1 \cdot 2\pi,$$

$$\Delta_n^1 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2},$$

$$\Delta_n^2 = \frac{2n+1 \cdot 2n+3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2\pi}{2^2}.$$

„Vorausgesetzt wird bei diesem Satze, dass n sowohl als ν „irgend zwei positive ganze Zahlen sind.“ *)

---

*) Durch Entwickelung von

$$\frac{1}{(U - V\cos\Theta)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

nach steigenden Potenzen von V ergiebt sich:

$$\frac{1}{(U - V\cos\Theta)^{\frac{2n+1}{2}}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{2^p \Delta_n^p}{2\pi} \cdot \frac{V^p \cos^p\Theta}{U^{\frac{2n+2p+1}{2}}},$$

wo Δ_n^p die oben angegebene Bedeutung hat. Beachtet man nun, dass das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^p\Theta \cdot \cos\nu\Theta \cdot d\Theta$$

für $p < \nu$ gleich Null und für $p = \nu$ gleich $\frac{2\pi}{2^\nu}$ ist, so ergiebt sich aus dieser Formel, wenn man mit $\cos\nu\Theta$ multiplicirt, und sodann nach Θ zwischen 0 und 2π integrirt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\nu\Theta \cdot d\Theta}{(U - V\cos\Theta)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{\Delta_n^\nu V^\nu}{U^{\frac{2n+2\nu+1}{2}}} \left\{1 + A\frac{V}{U} + B\frac{V^2}{U^2} + \ldots\right\},$$

wo A, B, ... gewisse Constanten sind, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt.

Wenn man jetzt endlich durch V^ν dividirt, und sodann das in U und V enthaltene x gleich x_0 werden lässt, so ergiebt sich, weil der Voraussetzung nach V für $x = x_0$ verschwindet:

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos\nu\Theta \cdot d\Theta}{V^\nu (U - V\cos\Theta)^{\frac{2n+1}{2}}}\right)_{x=x_0} = \frac{\Delta_n^\nu}{\left(U(x_0)\right)^{\frac{2n+2\nu+1}{2}}};$$

und hiemit ist der oben angegebene Hülfssatz bewiesen.

Setzt man den bei $\mathfrak{T}$ (28.) im Nenner unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck

(30.) $(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi = M,$

so lautet die hier auszuführende Entwickelung (29.) folgendermassen:

(31.) $$\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} = \sum_p \sum_q \sqrt{2a^2} \cdot C_p^q \cdot J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(\lambda_1) \cdot \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man mit $\cos p\Omega$ multiplicirt, und nach Ω zwischen 0 und 2π integrirt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Omega \cdot d\Omega}{M^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \sqrt{2a^2} \cdot \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_1) \cos q\Phi,$$

folglich, wenn man mit $(4\lambda\lambda_1)^p$ dividirt, und sodann $\lambda = 0$ setzt:

(32.) $$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Omega \cdot d\Omega}{(4\lambda\lambda_1)^p \cdot M^{\frac{1}{2}}}\right)_{\lambda=0} = 2\pi \sqrt{2a^2} \cdot \sum_q C_p^q \cdot \left(\frac{J_p^q(\lambda)}{(4\lambda)^p}\right)_{\lambda=0} \cdot \frac{A_p^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p} \cdot \cos q\Phi.$$

Auf das links stehende Integral lässt sich nun unser Hülfssatz anwenden; man hat zu diesem Ende in jenem Satze λ an Stelle von x, ferner

$(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi$ an Stelle von U, und
$4\lambda\lambda_1$ an Stelle von V

zu nehmen. Man erhält alsdann für das in Rede stehende Integral folgenden Werth:

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Omega \cdot d\Omega}{(4\lambda\lambda_1)^p \cdot M^{\frac{1}{2}}}\right)_{\lambda=0} = \frac{\Delta_0^p}{\left((1+\lambda_1^2) - (1-\lambda_1^2)\cos\Phi\right)^{\frac{2p+1}{2}}}.$$

Substituirt man diesen Werth in (32.), multiplicirt sodann jene Gleichung mit $\cos q\Phi$, und integrirt zwischen $\Phi = 0$ und $\Phi = 2\pi$, so ergiebt sich:

(33.) $$\Delta_0^p \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi \cdot d\Phi}{\left((1+\lambda_1^2) - (1-\lambda_1^2)\cos\Phi\right)^{\frac{2p+1}{2}}} = 4\pi^2 \cdot \sqrt{2a^2} \cdot C_p^q \cdot \left(\frac{J_p^q(\lambda)}{(4\lambda)^p}\right)_{\lambda=0} \cdot \frac{A_p^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p}.$$

Daraus folgt, dass die rechts stehende Function

$$\frac{A_p^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p}$$

von dem links stehenden Integral nur durch einen constanten Factor verschieden ist.

Nun wird es aber offenbar in der Entwickelung (31.) bei Bestimmung der beiden Functionen $J_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda_1)$ nur darauf

ankommen, diese Functionen bis auf irgend welche constante Factoren zu bestimmen. Ist dieses nämlich geschehen, so wird man dann die in jener Entwickelung noch enthaltenen Constanten C_p^q immer so wählen können, dass der Ausdruck $\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}}$ jener Entwickelung wirklich gleich wird.

Zufolge (33.) können wir demnach für die Function

$$\frac{A_p^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p}$$

den Werth

$$\gamma \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi \cdot d\Phi}{\left((1+\lambda_1^2)-(1-\lambda_1^2)\cos\Phi\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

nehmen, wo γ einen constanten Factor vorstellt, den wir nach Willkühr wählen können. Wir nehmen

$$\gamma = \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi},$$

und haben dann also:

$$(34.)\quad \frac{A_p^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p} = \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi \cdot d\Phi}{\left((1+\lambda_1^2)-(1-\lambda_1^2)\cos\Phi\right)^{\frac{2p+1}{2}}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wie sogleich mit Rücksicht auf das später Folgende bemerkt werden mag, wenn man mit $(1-\lambda_1^2)^q$ dividirt:

$$(35.)\quad \frac{A_p^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p(1-\lambda_1^2)^q} = \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi \cdot d\Phi}{(1-\lambda_1^2)^q \cdot \left((1+\lambda_1^2)-(1-\lambda_1^2)\cos\Phi\right)^{\frac{2p+1}{2}}}.$$

Der Werth, welchen das rechts stehende Integral für $\lambda_1 = 1$ annimmt, lässt sich wiederum bestimmen durch Anwendung unseres Hülfssatzes. Derselbe ist nämlich jenem Satze zufolge gleich

$$\frac{A_p^q}{2^{\frac{2p+2q+1}{2}}}.$$

Demnach ergiebt sich aus der Formel (35.), wenn man darin $\lambda_1 = 1$ werden lässt:

$$(36.)\quad \left(\frac{A_p^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1} = \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{A_p^q}{2^{\frac{2p+2q+1}{2}}} = \frac{A_p^q}{2\pi \cdot 2^q},$$

eine Formel, welche später bei Bestimmung der Constanten C_p^q von Nutzen sein wird.

In (34.) haben wir die Function $A_p^q(\lambda_1)$ bestimmt. In ähnlicher Weise wie dort lässt sich nun andererseits auch die Function $J_p^q(\lambda)$ bestimmen.

Wir gehen dabei wiederum aus von der Gleichung (31.). Multiplicirt man diese mit $\cos q\Phi$, und integrirt sodann von $\Phi = 0$ bis $\Phi = 2\pi$, so erhält man:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi \cdot d\Phi}{M^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\sqrt{2a^2} \cdot \sum_p C_p^q \cdot J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(\lambda_1) \cdot \cos p\Omega,$$

oder, wenn man mit $(1-\lambda^2)^q(1-\lambda_1^2)^q$ dividirt, und sodann $\lambda_1 = 1$ setzt:

$$(37.)\quad \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi \cdot d\Phi}{(1-\lambda^2)^q(1-\lambda_1^2)^q \cdot M^{\frac{1}{2}}}\right)_{\lambda_1=1} = 2\pi\sqrt{2a^2} \cdot \sum_p C_p^q \cdot \frac{J_p^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q} \cdot \left(\frac{A_p^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1} \cdot \cos p\Omega.$$

Der Werth, welchen das links stehende Integral für $\lambda_1 = 1$ annimmt, kann sofort durch Anwendung unseres Hülfssatzes bestimmt werden, wenn man dort λ_1 statt x, ferner

$$(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega \quad \text{statt } U, \quad \text{und}$$
$$(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2) \quad \text{statt } V$$

nimmt. Man findet dann, dass jener Werth gleich

$$\frac{\Delta_0^q}{\left(2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\Omega\right)^{\frac{2q+1}{2}}}$$

ist. Substituirt man diesen Werth in (37.), multiplicirt man sodann jene Formel mit $\cos p\Omega$, und integrirt endlich zwischen $\Omega = 0$ und $\Omega = 2\pi$, so ergiebt sich:

$$(38.)\quad \Delta_0^q \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Omega \cdot d\Omega}{\left(2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\Omega\right)^{\frac{2q+1}{2}}} = 4\pi^2\sqrt{2a^2} \cdot C_p^q \cdot \frac{J_p^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q} \cdot \left(\frac{A_p^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1}.$$

Daraus folgt, dass die rechts stehende Function

$$\frac{J_p^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q}$$

von dem links stehenden Integral nur durch einen constanten Factor verschieden ist. Diesen Factor können wir nun wiederum nach Willkühr wählen, und können demnach setzen:

$$(39.)\quad \frac{J_p^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q} = \frac{2^{\frac{2q+1}{2}}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Omega \cdot d\Omega}{\left(2(1+\lambda^2)-4\lambda\cos\Omega\right)^{\frac{2q+1}{2}}}.$$

Setzt man diesen Werth der Function

$$\frac{J_p^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q}$$

in (38.) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung der Constanten C_p^q folgende Formel:

$$\varDelta_0^q = 4\pi^2 \cdot \sqrt{2a^2} \cdot C_p^q \cdot \frac{2^{\frac{2q+1}{2}}}{2\pi} \cdot \left(\frac{\varDelta_p^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1},$$

d. i. mit Rücksicht auf (36.):

$$\varDelta_0^q = 4\pi^2 \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \frac{2^{\frac{2q+1}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{\varDelta_p^q}{2\pi \cdot 2^q} \cdot C_p^q$$

oder:

$$\varDelta_0^q = 2a \cdot \varDelta_p^q \cdot C_p^q.$$

Daraus folgt:

$$C_p^q = \frac{1}{2a} \cdot \frac{\varDelta_0^q}{\varDelta_p^q}.$$

Nun ist nach Seite 27:

$$\varDelta_p^q = \frac{2p+1 \cdot 2p+3 \cdots 2p+2q-1}{2 \cdot 4 \cdots 2q} \cdot \frac{2\pi}{2^q},$$

$$\varDelta_0^q = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2q-1}{2 \cdot 4 \cdots 2q} \cdot \frac{2\pi}{2^q}.$$

Demnach wird

$$C_p^q = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2q-1}{2p+1 \cdot 2p+3 \cdots 2p+2q-1} \cdot \frac{1}{2a},$$

oder was dasselbe ist

$$(40.)\quad C_p^q = \frac{(1 \cdot 3 \cdots 2p-1)(1 \cdot 3 \cdots 2q-1)}{1 \cdot 3 \cdots 2p+2q-1} \cdot \frac{1}{2a},$$

mithin:

$$(41.)\quad C_p^q = C_q^p.$$

Durch die Formeln (34.), (39.) und (40.) sind die in der Entwickelung

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} = \sum_p \sum_q C_p^q \cdot J_p^q(\lambda) \cdot \varDelta_p^q(\lambda_1) \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi$$

vorkommenden Functionen $A_p^q(\lambda_1)$, $J_p^q(\lambda)$ und die darin enhaltenen Constanten C_p^q bestimmt. Wir können demnach folgendes Resultat aussprechen:

Der Ausdruck

$$(42.)\quad \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}$$

lässt sich, falls die Werthe von λ und λ_1 den Bedingungen

$$0 \leqq \lambda < \lambda_1 \leqq 1$$

unterworfen gedacht werden, immer durch folgende Entwickelung darstellen:

$$(43.)\quad \mathfrak{T} = \sum_p \sum_q C_p^q\, J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(\lambda_1) \cdot \cos p\Omega \cdot \cos q\Phi,$$

wo die Constanten C und die Functionen J, A die Werthe

$$(44.)\quad \begin{cases} C_p^q = \dfrac{1}{2a} \cdot \dfrac{(1\cdot 3\cdots 2p-1)(1\cdot 3\cdots 2q-1)}{1\cdot 3\cdots 2p+2q-1}, \\[2ex] J_p^q(\lambda) = \dfrac{(1-\lambda^2)^q}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Theta \cdot d\Theta}{\left(1 - 2\lambda\cos\Theta + \lambda^2\right)^{\frac{2q+1}{2}}}, \\[2ex] A_p^q(\lambda_1) = \dfrac{\lambda_1^p}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Theta \cdot d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda_1^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}. \end{cases}$$

besitzen.*)

Man kann die in (44.) für die Functionen J, A angegebenen Ausdrücke auf mannigfaltige Weise umgestalten. So findet man z. B., falls man sich der Transcendenten

$$(45.)\quad f_p^q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Theta \cdot d\Theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\Theta\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

bedient, die Werthe:

$$(46.)\quad \begin{cases} J_p^q(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot f_q^p\left(\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right), \\[2ex] A_p^q(\lambda_1) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot f_p^q\left(\dfrac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1}\right); \end{cases}$$

---

*) Man kann den Werth von C_p^q auch so darstellen:

$$C_p^q = C_q^p = \frac{1}{2a} \cdot \frac{\Pi(2p)\cdot\Pi(2q)}{\Pi(2p+2q)} \cdot \frac{\Pi(p+q)}{\Pi(p)\cdot\Pi(q)}.$$

ferner, falls man sich der Transcendenten

$$(47.)\quad F_p^q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Theta \cdot d\Theta}{\left(1 - x \cos\Theta\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

bedient, die Werthe:

$$(48.)\quad \begin{cases} J_p^q(\lambda) = \sqrt{\dfrac{1}{1+\lambda^2}} \left(\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^q \cdot F_q^p\left(\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right), \\ A_p^q(\lambda_1) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\lambda_1^2}} \left(\dfrac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2}\right)^p \cdot F_p^q\left(\dfrac{1-\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}\right). \end{cases}$$

Endlich findet man, falls man sich der hypergeometrischen Reihe

$$(49.)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha+1 \cdot \beta \cdot \beta+1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \gamma+1} x^2 + \ldots.$$

bedient, die Werthe:

$$(50.\text{ a.})\quad J_p^q(\lambda) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \frac{2q+1 \cdot 2q+3 \cdots 2q+2p-1}{1 \cdot 2 \cdots p} \cdot \lambda^p \cdot (1-\lambda^2)^q \cdot F(q+\frac{1}{2}, p+q+\frac{1}{2}, p+1, \lambda^2),$$

$$(50.\text{ b.})\quad A_p^q(\lambda_1) =$$
$$= \left(\frac{1}{8}\right)^q \cdot \frac{2p+1 \cdot 2p+3 \cdots 2p+2q-1}{1 \cdot 2 \cdots q} \cdot \lambda_1^p \cdot (1-\lambda_1^2)^q \cdot F(q+\frac{1}{2}, p+q+\frac{1}{2}, 2q+1, 1-\lambda_1^2).$$

Durch die Formeln auf Seite 16 und 32 gelangen wir nun, was die reciproce Entfernung zweier Puncte anbelangt, zu folgendem Ergebniss:

Die reciproce Entfernung zweier Puncte x, y, z und x_1, y_1, z_1:

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

hat, falls λ, ω, φ und λ_1, ω_1, φ_1 die neuen Coordinaten jener Puncte vorstellen, den Werth:

$$(51.)\quad T = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} \cdot \sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1\cos(\omega-\omega_1) - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos(\varphi-\varphi_1)}}.$$

Dieser Werth lässt sich, falls der Punct λ, ω, φ auf einer engeren, der Punct λ_1, ω_1, φ_1 auf einer weiteren Ringfläche liegt, d. i. falls $\lambda < \lambda_1$ ist, durch folgende Entwickelung darstellen:

$$(52.)\quad T = R \cdot R_1 \cdot \sum_p \sum_q C_p^q \cdot J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(\lambda_1) \cdot \cos p(\omega-\omega_1) \cdot \cos q(\varphi-\varphi_1).$$

Hier haben R und R_1 die Bedeutungen:

$$(53.)\quad \begin{cases} R = \sqrt{1 - 2\lambda\ \cos\omega + \lambda^2}\ , \\ R_1 = \sqrt{1 - 2\lambda_1\ \cos\omega_1 + \lambda_1^2}\ . \end{cases}$$

Ferner stellen hier die C_p^q gewisse Constanten vor, deren Werthe man in (44.) angegeben findet, und die $J_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda_1)$ gewisse Functionen, deren Werthe in (44.), (46.), (48.) und (50.) in vier verschiedenen Formen aufgeführt sind.

Es mag aus dieser allgemeinen Entwickelung noch eine besondere Formel abgeleitet werden, welche für das Folgende nothwendig sein wird. Wenn man die Gleichungen (51.), (52.) durch $R \cdot R_1$ dividirt, und zugleich $\lambda_1 = 1$, $\omega_1 = 0$ setzt, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\omega}} = \sum_p \sum_q C_p^q \cdot J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(1)\ \cos p\omega \cdot \cos q(\varphi - \varphi_1).$$

Nun ist, wie aus (44.) folgt:

$$A_p^q(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos q\Theta \cdot d\Theta.$$

Daraus folgt, dass

für $q=0$: $A_p^0(1) = 1$, hingegen

für andere Werthe von q: $A_p^q(1) = 0$ wird.

Somit geht unsere Formel über in:

$$\frac{1}{2a\sqrt{1 - 2\lambda\ \cos\omega + \lambda^2}} = \sum_p C_p^0 \cdot J_p^0(\lambda) \cdot A_p^0(1)\ \cos p\omega,$$

$$= \sum_p C_p^0 \cdot J_p^0(\lambda) \cdot \cos p\omega,$$

oder, weil nach (44.) $C_p^0 = \frac{1}{2a}$ ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\ \cos\omega + \lambda^2}} = \sum_p J_p^0(\lambda) \cdot \cos p\omega.$$

Mit Anwendung der Bezeichnungen (53.) ergiebt sich daher:

$$(54.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R} = \sum_p J_p^0(\lambda) \cdot \cos p\omega, \\ \dfrac{1}{R_1} = \sum_p J_p^0(\lambda_1) \cdot \cos p\omega_1 . \end{cases}$$

§. 4.

Allgemeine Formeln. Die Transcendente

$$F_0^q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Theta \cdot d\Theta}{\sqrt{1 - x \cos \Theta}}$$

wird für das aus α, β, Ω zusammengesetzte Argument

$$x = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{1 - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \Omega}$$

nach den Cosinus der Vielfachen von Ω entwickelt.

Auf Seite 32 haben wir eine Entwickelung gefunden, welche, (falls wir für C_p^q seinen Werth substituiren) folgendermassen lautet:

$$(1.)\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1{}^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos \Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1{}^2) \cos \Phi}} =$$
$$= \sum_p \sum_q \frac{(1 \cdot 3 \cdots 2p-1)(1 \cdot 3 \cdots 2q-1)}{1 \cdot 3 \cdots 2p+2q-1} J_p^q(\lambda) \cdot A_p^q(\lambda_1) \cos p\Omega \cos q\Phi,$$

und welche immer gültig ist, falls

$$0 \leqq \lambda < \lambda_1 \leqq 1$$

ist. Die Functionen J und A lassen sich mit Hülfe der auf Seite 33 betrachteten Transcendenten $F_p^q(x)$ so darstellen:

$$J_p^q(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{1+\lambda^2}} \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^q \cdot F_q^p\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$A_p^q(\lambda_1) = \sqrt{\frac{2}{1+\lambda_1{}^2}} \left(\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1{}^2}\right)^p \cdot F_p^q\left(\frac{1-\lambda_1{}^2}{1+\lambda_1{}^2}\right).$$

Substituirt man diese Werthe, und setzt man zugleich zur Abkürzung

$$(2.)\quad a_{pq} = \frac{(1 \cdot 3 \cdots 2p-1)(1 \cdot 3 \cdots 2q-1)}{1 \cdot 3 \cdots 2p+2q-1},$$

d. i.

$$(2.\text{ a.})\quad a_{pq} = \frac{\Pi(2p) \cdot \Pi(2q)}{\Pi(2p+2q)} \cdot \frac{\Pi(p+q)}{\Pi(p) \cdot \Pi(q)},$$

so verwandelt sich die Formel (1.) in

$$(3.)\quad \sqrt{\frac{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1{}^2)}{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1{}^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos \Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1{}^2) \cos \Phi}} =$$
$$= \sum_p \sum_q a_{pq} \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^q F_q^p\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right) \cdot \left(\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1{}^2}\right)^p F_p^q\left(\frac{1-\lambda_1{}^2}{1+\lambda_1{}^2}\right) \cos p\Omega \cos q\Phi.$$

Und diese Formel verwandelt sich, wenn man

$$(4.)\quad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \sin \alpha, \qquad \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1{}^2} = \sin \beta,$$

mithin:
$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \cos\alpha, \qquad \frac{1-\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} = \cos\beta$$
setzt, in:

$$(5.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega-\cos\alpha\cos\beta\cos\Phi}} =$$
$$= \sum_p\sum_q a_{pq}\cdot\cos^q\alpha\, F^p_q(\sin\alpha)\cdot\sin^p\beta\, F^q_p(\cos\beta)\cdot\cos p\Omega\cos q\Phi.$$

Diese durch ihre Symmetrie ausgezeichnete Formel wird, da die Gleichung (1.) gültig ist, so lange
$$0 \leqq \lambda < \lambda_1 \leqq 1$$
ist, stets gelten, sobald
$$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$$
ist.

Setzt man in (5.) $\alpha = 0$, so erhält man:

$$(6.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\cos\beta\cos\Phi}} = \sum_p\sum_q a_{pq}\, F^p_q(0)\cdot\sin^p\beta\, F^q_p(\cos\beta)\cdot\cos p\Omega\cos q\Phi.$$

Nun ist, wie sich aus der Definition unserer Transcendenten $F^p_q(x)$ sofort *) ergiebt, der Werth von $F^p_q(0)$ immer Null, mit alleiniger Ausnahme des Falles, dass $p=0$ ist, nämlich
$$F^0_q(0) = 1.$$
Somit geht unsere Gleichung (6.) über in

$$(7.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\cos\beta\cos\Phi}} = \sum_q a_{0q}\, F^q_0(\cos\beta)\cdot\cos q\Phi.$$

Setzt man demnach $\cos\beta = x$, und beachtet man, dass zufolge (2. und 2a.) $a_{0q} = 1$ ist, so folgt:
$$\frac{1}{\sqrt{1-x\cos\Phi}} = \sum_q F^q_0(x)\cdot\cos q\Phi,$$
oder
$$(8.)\quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}-\cos\Phi}} = \sqrt{x}\cdot\sum_q F^q_0(x)\cdot\cos q\Phi.$$

Und zwar wird diese Gleichung, weil (7.) für jeden Werth von β gilt, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, für jeden Werth von x gültig sein, der zwischen 0 und 1 liegt. Ein solcher Werth von x ist, falls α und β wiederum wie früher Winkel vorstellen, die

*) Nach Seite 33 ist:
$$F^p_q(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\cos p\Theta\cdot d\Theta}{\left(1-x\cos\Theta\right)^{\frac{2q+1}{2}}}.$$

zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, und Ω einen ganz beliebigen Winkel bedeutet, folgender:

$$x = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega}.$$

Bezeichnet man nämlich in einem spährischen Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich α und β sind, und in welchem der von diesen eingeschlossene Winkel gleich Ω ist, die dritte Seite mit γ, so ist $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\Omega$, folglich

$$x = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + (1-\cos\gamma)}.$$

Daraus aber ergiebt sich mit Rücksicht auf den für die Winkel α, β festgesetzten Spielraum sofort, dass der Werth von x in der That immer zwischen 0 und 1 liegt.

Durch Einsetzung dieses Werthes von x verwandelt sich nun die Gleichung (8.) in

$$(9.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega-\cos\alpha\cos\beta\cos\Phi}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega}}\cdot\sum_q F_0^q\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega}\right)\cdot\cos q\Phi.$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Vergleichung von (5.) und (9.), dass in beiden Formeln die auf der rechten Seite in $\cos q\Phi$ multiplicirten Factoren einander gleich sein müssen. Somit folgt:

$$(10.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega}}\cdot F_0^q\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega}\right) =$$
$$= \sum_p a_{pq}\cdot\cos^q\alpha\, F_q^p(\sin\alpha)\cdot\sin^p\beta\, F_p^q(\cos\beta)\cdot\cos p\Omega.$$

Wir sind also in (5.) zu dem Resultat gelangt, dass sich der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega-\cos\alpha\cos\beta\cos\Phi}}$$

unter Anwendung der Transcendenten

$$F_p^q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\Theta\cdot d\Theta}{\left(1-x\cos\Theta\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

in eine nach den Cosinus der Vielfachen von Ω und Φ fortschreitende Reihe entwickeln lässt; und haben ferner jetzt in (10.) gesehen, wie sich der Werth, welchen die Transcendente $F_0^q(x)$ für das Argument

$$x = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta\cos\Omega}$$

besitzt, nach den Cosinus der Vielfachen von Ω entwickeln lässt. Vorausgesetzt wird dabei immer nur, dass

$$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist, während Ω und Φ ganz beliebig Werthe besitzen können.

§. 5.

Die Vertheilung der Elektricität im Ringe.

Wir wollen uns einen die Elektricität leitenden Ring, nämlich einen Körper denken, dessen Oberfläche durch die Gleichung $\lambda = $Const. dargestellt wird, und diesen Körper uns umgeben denken von einem nichtleitenden Medium. Diesem Körper sei zu Anfang aus dem Conductor einer Elektrisirmaschine ein gewisses Quantum freier Elektricität mitgetheilt worden. Es fragt sich, wie wird sich diese Elektricität, wenn sie sich selber überlassen, d. h. keinen äusseren Einwirkungen ausgesetzt ist, auf der Oberfläche des Ringes vertheilen.

Wir bezeichnen irgend ein Element der Oberfläche des Ringes mit dO, und dasjenige Quantum von Elektricität, welches nach Eintritt der hier gesuchten Gleichgewichtslage auf dO vorhanden ist, mit EdO; wir verstehen also unter E die Dichtigkeit der gesuchten elektrischen Schicht.

Die Oberfläche des Ringes wird, wenn wir uns wie früher seine Achse vertikal und seine Aequatorebene horizontal denken, von jeder Fläche $\omega = $Const., d. i. von jeder über seinem Polarkreise stehenden Kugelcalotte in einem Horizontalkreise, und andererseits von jeder Fläche $\varphi = $Const., d. i. von jeder Meridianebene in einem Vertikalkreise durchschnitten. Denken wir uns also von den Flächen des Systems $\omega = $Const. und ebenso auch von denen des Systemes $\varphi = $Const. unendlich viele construirt, so werden wir dadurch auf der Oberfläche unseres Ringes unendlich viele Horizontal- und unendlich viele Vertikalkreise erhalten; und durch diese Kreise wird die ganze Oberfläche in lauter unendlich kleine Rechtecke zerlegt werden.

Wir wollen nun zum Elemente dO eines von diesen Rechtecken nehmen. Alsdann ist, wenn wir die Coordinaten für zwei einander diagonal gegenüberliegende Ecken dieses Rechteckes mit

λ, ω, φ und $\lambda, \omega + d\omega, \varphi + d\varphi$ bezeichnen, der Flächeninhalt dO dieses Rechteckes von folgendem Werthe:

$$dO = \frac{2a^2\lambda(1-\lambda^2) \cdot d\omega\, d\varphi}{(1-2\lambda \cos\omega + \lambda^2)^2},$$

wie sich solches aus (11.) Seite 14 leicht ergiebt. Dabei bedeutet dann das in dieser Formel vorkommende λ den Parameter unseres Ringes, d. h. den constanten Werth, welchen die Coordinate λ für sämmtliche Puncte besitzt, die auf der Oberfläche des Ringes liegen. Bezeichnen wir diesen Parameter mit $\lambda = c$, so ist also:

$$(1.)\quad dO = \frac{2a^2 c(1-c^2) \cdot d\omega\, d\varphi}{(1-2c \cos\omega + c^2)^2}.\ ^{*)}$$

Denken wir uns nun auf der Oberfläche unseres Ringes eine ganz beliebige elektrische Vertheilung, so wird E irgend welche Function von ω und φ sein; und demnach wird alsdann das auf dem Element dO vorhandene Elektricitätsquantum den Werth haben:

$$(2.)\quad E dO = F(\omega, \varphi) \cdot d\omega\, d\varphi,$$

wo $F(\omega, \varphi)$ irgend welche Function von ω und φ ist.

---

*) Ein Vertikalkreis auf unserer Ringoberfläche wird dargestellt durch den Schnitt dieser Oberfläche mit irgend einer Meridianebene, d. i. durch den Schnitt der Fläche $\lambda = c$ mit einer Fläche $\varphi =$ Const. Für die Puncte eines solchen Kreises sind demnach die Coordinaten λ und φ constant, und ω allein variabel. Und zwar erhält man sämmtliche Puncte eines solchen Vertikalkreises, wenn man ω von 0 bis 2π wachsen lässt (wie sich aus der über den Werth von ω getroffenen Festsetzung [Seite 6] leicht entnehmen lässt). Beachtet man ausserdem, dass man sämmtliche Vertikalkreise der Ringoberfläche erhält, sobald man φ von 0 bis 2π wachsen lässt, so ist klar, dass man, um sämmtliche Puncte der Ringoberfläche zu erhalten, der Coordinate ω, und ebenso auch der Coordinate φ alle zwischen 0 und 2π liegenden Werthe zuertheilen muss. Um demnach aus der Formel (1.) die Oberfläche des Ringes zu finden, muss man den dort für das Element dO aufgestellten Werth nach ω sowohl, als auch nach φ zwischen den Grenzen 0 und 2π integriren. Bezeichnet man also die Oberfläche des Ringes mit O, so ergiebt sich:

$$O = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2a^2 c(1-c^2) \cdot d\omega\, d\varphi}{(1-2c\cos\omega + c^2)^2},$$

d. i.

$$O = 4\pi a^2 c(1-c^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{(1-2c \cos\omega + c^2)^2}.$$

Hieraus folgt:

$$O = 8\pi^2 \cdot \frac{a^2 c(1+c^2)}{(1-c^2)^2}.$$

Wir wollen, was die hier vorliegende Aufgabe anbelangt, für den Werth von EdO folgenden Ansatz machen:

$$(3.)\quad EdO = \frac{f(\omega, \varphi)}{\sqrt{1 - 2c\cos\omega + c^2}} \cdot d\omega\, d\varphi;$$

wo es sich nun also um die Bestimmung der Function $f(\omega, \varphi)$ handelt. Diese Function besitzt, wie sich sogleich erkennen lässt, zwei Eigenschaften, durch welche ihre Ermittelung erleichtert wird.

Erstens muss nämlich bei der Gleichgewichtslage, um welche es sich hier handelt, die elektrische Dichtigkeit E von einem Vertikalkreise zum andern hin dieselbe sein, mithin E unabhängig von φ sein. Gleiches wird demnach auch von der Function f gelten.

Zweitens muss, was ein und denselben Vertikalkreis anbelangt, bei der gesuchten Gleichgewichtslage die elektrische Vertheilung auf einem solchen Kreise symmetrisch sein in Bezug auf die den Kreis halbirende Aequatorebene. Das heisst, es muss E in je zwei Puncten eines solchen Kreises, welche symmetrisch zur Aequatorebene liegen, ein und denselben Werth haben. Nun sind die ω Coordinaten zweier solchen Puncte immer so beschaffen, dass ihre Summe $= 2\pi$ ist. Ist also ω die Coordinate des einen, so ist $2\pi - \omega$ die des andern. Demnach muss der Werth von E, und zufolge (3.) also auch der Werth der Function f ungeändert bleiben, sobald man ω mit $2\pi - \omega$ vertauscht.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt, dass f eine allein von ω abhängende Function ist, und zwar eine Function, welche sich nach den Cosinus der Vielfachen von ω entwickeln lässt. Wir können demnach für EdO folgenden Ansatz machen:

$$(4.)\quad EdO = \frac{\sum\limits_p K_p \cos p\omega}{\sqrt{1 - 2c\cos\omega + c^2}} \cdot d\omega\, d\varphi,$$

wo die K_p zu bestimmende Constante sind. Wir wollen hinfort irgend einen auf der Oberfläche des Ringes liegenden Punct mit s bezeichnen, und demgemäss die Coordinaten desselben λ_s, ω_s, φ_s nennen; wo dann λ_s identisch ist mit dem Parameter c unseres Ringes. Dementsprechend mag auch der Inhalt des bei s liegenden Flächenelementes mit dO_s, und die auf demselben vorhandene Elektricitätsmenge mit $E_s dO_s$ bezeichnet werden; so dass sich die Formel (4.) verwandelt in:

$$(5.)\quad E_s dO_s = \frac{\sum\limits_p K_p \cos p\omega_s}{\sqrt{1-2c\cos\omega_s + c^2}} \cdot d\omega_s d\varphi_s .$$

Unter R wurde (Seite 34) der Ausdruck verstanden

$$R = \sqrt{1-2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,;$$

demnach wird R_s derjenige Werth sein, welchen dieser Ausdruck annimmt, wenn man für λ und ω die Coordinaten des Punctes s, d. i. die Grössen $\lambda_s = c$ und ω_s substituirt. Also:

$$(6.)\quad R_s = \sqrt{1-2c\cos\omega_s + c^2}\,.$$

Somit geht (5.) über in

$$(7.)\quad E_s dO_s = \frac{1}{R_s}\sum_p K_p \cos p\omega_s \cdot d\omega_s d\varphi_s .$$

Nun wird, falls sich die auf der Oberfläche des Ringes gedachte elektrische Schicht unter der gegenseitigen Einwirkung ihrer Theilchen im Gleichgewicht befindet, bekanntlich das Potential dieser Schicht auf einen innern Punct des Ringes constant sein, nämlich ein und denselben Werth behalten, sobald man jenem Puncte im Innern oder auch an der Oberfläche des Ringes andere und andere Lagen anweiset. Ist E_s die Dichtigkeit der elektrischen Schicht auf dem Elemente dO_s, und bezeichnet T_{si} die reciproce Entfernung dieses Elementes von irgend einem Puncte i, so ist das Potential der elektrischen Schicht auf den Punct i gleich

$$(8.)\quad S\, T_{is} E_s dO_s\,,$$

die Integration S ausgedehnt über sämmtliche Elemente dO_s der ganzen Ringoberfläche.

Die Constanten K_p in (7.) sind demnach so zu bestimmen, dass der Ausdruck (8.) für alle im Innern und an der Oberfläche des Ringes liegende Puncte i ein und denselben Werth hat.

Für T_{is} erhalten wir nach (52.) Seite 33., weil i im Innern des Ringes liegen soll, und demnach

$$\lambda_i < \lambda_s\,,$$

das ist:

$$\lambda_i < c$$

ist, folgende Entwickelung:

$$(9.)\quad T_{is} = R_i R_s \sum_p\sum_q C_p^q \cdot J_p^q(\lambda_i) \cdot A_p^q(c) \cos p(\omega_i - \omega_s) \cos q(\varphi_s - \varphi_i)\,.$$

Für das in (8.) angegebene Potential ergiebt sich nun, wenn man für $E_s dO_s$ seinen Werth (7.) substituirt, und beachtet, dass

die über sämmtliche Elemente dO_s der Ringfläche auszuführende Summation S auf zwei Integrationen hinauskommt, von denen die eine nach ω zwischen $\omega = o$ und $\omega = 2\pi$, die andere nach φ zwischen $\varphi = o$ und $\varphi = 2\pi$ auszuführen ist, folgender Ausdruck

$$S\, T_{is}\, E_s dO_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{T_{is} \cdot \sum_p K_p \cos p\omega_s}{R_s} \cdot d\omega_s d\varphi_s,$$

oder weil der Werth der Summe $\sum_p K_p \cos p\omega_s$ von φ_s unabhängig ist:

$$(10.)\quad S\, T_{is} E_s dO_s = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\sum_p K_p \cos p\omega_s \right) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{T_{is} d\varphi_s}{R_s} \right\} \cdot d\omega_s .$$

Nun ist zufolge (9.):

$$(11.)\quad \int_0^{2\pi} \frac{T_{is} d\varphi_s}{R_s} = 2\pi R_i \cdot \sum_p C_p^0 J_p^0(\lambda_i) A_p^0(c) \cos p(\omega_i - \omega_s),$$

weil bei Ausführung dieser Integration alle diejenigen Glieder der Entwickelung (9.) fortfallen, welche mit den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi_i - \varphi_s)$ behaftet sind, mithin nur diejenigen Glieder übrig bleiben, welche dem Stellenzeiger $q = o$ entsprechen. Substituirt man (11.) in (10.), so folgt:

$$S\, T_{is} E_s dO_s = 2\pi R_i \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sum_p K_p \cos p\omega_s \right) \left(\sum_p C_p^0 J_p^0(\lambda_i) A_p^0(c) \cos p(\omega_i - \omega_s) \right) \cdot d\omega_s,$$

und daraus folgt schliesslich:

$$S\, T_{is} E_s dO_s = 4\pi^2 R_i \cdot \sum_p K_p C_p^0 J_p^0(\lambda_i) A_p^0(c) \cdot \cos p\omega_i ,$$

oder, wenn man beachtet, dass nach Seite 32 und 34

$$C_p^0 = \frac{1}{2a}, \text{ und}$$

$$R_i = \frac{1}{\sum_p J_p^0(\lambda_i) \cos p\omega_i}$$

ist:

$$S\, T_{is}\, E_s dO_s = \frac{\sum_p K_p A_p^0(c) J_p^0(\lambda_i) \cos p\omega_i}{\sum_p J_p^0(\lambda_i) \cdot \cos p\omega_i} \cdot \frac{4\pi^2}{2a}.$$

Damit nun dieser Ausdruck für alle Lagen des inneren Punctes i ein und denselben Werth hat, d. h. damit dieser Ausdruck von λ_i und ω_i unabhängig wird, müssen die Werthe der Constanten K_p so gewählt werden, dass die Glieder der im Zähler befind-

lichen Summe von denen der im Nenner befindlichen Summe nur durch einen gemeinsamen constanten Factor verschieden sind. Dieses geschieht, wenn man

$$4\pi^2 K_p \, A_p^0(c) = \gamma \cdot 2a,$$

also:

$$(12.) \quad K_p = \frac{\gamma a}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{A_p^0(c)}$$

setzt, wo γ eine beliebig gewählte Constante vorstellt; und zwar wird alsdann der Werth des Potentiales

$$(13.) \quad S \; T_{is} E_s dO_s = \gamma.$$

Somit ergiebt sich, wenn man (12.) in (7.) substituirt, für die gesuchte elektrische Vertheilung folgende Formel:

$$(14.) \quad E_s dO_s = \frac{\gamma a}{2\pi^2 \cdot R_s} \cdot \sum_p \frac{\cos p\omega_s}{A_p^0(c)} \cdot d\omega_s d\varphi_s.$$

Die hier noch enthaltene willkührliche Constante γ kann erst dann bestimmt werden, wenn die Masse freier Elektricität gegeben ist, welche dem Ringe zu Anfang mitgetheilt wurde. Ist diese z. B. gegeben $= 1$, so muss γ so bestimmt werden, dass das über die Oberfläche des Ringes ausgedehnte Integral

$$S \; E_s dO_s = 1$$

wird.

Zufolge (1.) ist:

$$(15.) \quad dO_s = \frac{2a^2 c(1-c^2) \cdot d\omega_s d\varphi_s}{R_s^4};$$

und nunmehr ergiebt sich durch Division von (14.) und (15.):

$$(16.) \quad E_s = \frac{\gamma \cdot R_s^3}{4\pi^2 ac(1-c^2)} \cdot \sum_p \frac{\cos p\omega_s}{A_p^0(c)}.$$

Wir gelangen demnach zu folgendem Resultat:

„Die Art und Weise, in welcher sich eine dem „Ringe mitgetheilte Elektricitäts-Menge, auf „welche keine äussern Kräfte einwirken, auf der „Oberfläche des Ringes vertheilt, ist für alle „Meridiankreise des Ringes ein und dieselbe. „Demnach ist es, wenn man diese Vertheilung „kennen will, nur erforderlich zu wissen, in wel„cher Weise sich die Elektricität auf **einem** Me„ridiankreise vertheilt. Um nun die Dichtigkeit

„der elektrischen Schicht an den Puncten irgend „eines solchen Kreises angeben zu können, zie- „hen wir zunächst vom Mittelpunct *) des Ringes „aus an die Ringoberfläche zwei Tangenten, „welche in der Ebene des betrachteten Kreises „liegen, und sodann einen Hülfskreis, welcher „durch die vier Puncte, in denen die Ringober- „fläche von jenem Tangentenpaar berührt wird, „hindurchgeht. Die beiden Puncte, in welchen „die Aequatorebene von diesem Hülfskreise durch- „setzt wird, mögen A und B heissen; ferner mag „ein beliebiger Punct auf der Peripherie des Meri- „diankreises mit s, und der Winkel AsB mit ω „bezeichnet werden.

„Alsdann lässt sich die Dichtigkeit E der elek- „trischen Schicht im Puncte s als Function von ω „sofort angeben. Versteht man nämlich unter c „den Parameter **) der Ringoberfläche, und unter „$A_p^0(c)$ den Werth:

$$A_p^0(c) = \frac{c^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\left(\sin^2 \frac{\Theta}{2} + c^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}},$$

„so wird jene in s vorhandene Dichtigkeit E durch

$$E = g \cdot (1 - 2c \cos \omega + c^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_p \frac{\cos p\omega}{A_p^0(c)}$$

„dargestellt, wo g einen constanten Factor vor- „stellt, dessen Werth verschieden ist je nach der „dem Ringe mitgetheilten Elektricitätsmenge."

In ähnlicher Weise, und ohne alle weiteren Schwierigkeiten lässt sich die Ermittelung der Gleichgewichtslage des elektrischen

*) Unter dem Mittelpunct des Ringes ist derjenige Punct zu verstehen, in welchem die Achse des Ringes und die Aequatorebene desselben einander schneiden.

**) Ist für die beiden Kreise, in welchen die Ringoberfläche von der Aequatorebene durchschnitten wird, der Radius des kleineren r, und der des grösseren R, so hat dieser Parameter c den Werth:

$$c = \frac{\sqrt{rR} - r}{\sqrt{rR} + r}.$$

Fluidums im Ringe auch dann bewerkstelligen, wenn dieses ausser den Wirkungen, die seine eigenen Theilchen auf einander ausüben, gleichzeitig noch den Einwirkungen irgend welcher gegebenen äusseren Kräfte unterworfen ist.

In diesem Falle kann man dann aber in (3.) für die Function $f(\omega, \varphi)$ nicht den Ansatz machen:

$$f(\omega, \varphi) = \sum_p K_p \cos p\omega,$$

sondern muss vielmehr setzen:

$$f(\omega, \varphi) = \sum_p \sum_q \left\{ \begin{array}{l} \;\;K_p^q \cos p\omega \cos q\varphi + L_p^q \sin p\omega \sin q\varphi \\ + M_p^q \cos p\omega \sin q\varphi + N_p^q \sin p\omega \cos q\varphi \end{array} \right\}.$$

Ist dieses geschehen, so hat man dann die hier eingeführten Constanten K, L, M, N so zu bestimmen, dass das Potential der elektrischen Oberflächen-Belegung mit dem Potential der gegebenen äusseren Kräfte zusammengenommen eine Summe giebt, welche im Innern und an der Oberfläche des Ringes allenthalben constant ist.

§. 6.

Die Temperaturvertheilung im Ringe, falls derselbe an seiner Oberfläche überall mit beliebig gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact ist.

Es mögen zunächst einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt werden, welche sich auf die Lösung dieses Problemes für einen homogenen Körper von ganz beliebiger Gestalt beziehen.

Die Temperatur der Wärmequellen, mit welchen der Körper an seiner Oberfläche in Contact steht, soll an allen Stellen der Oberfläche gegeben sein, soll also gleich sein einer gegebenen Function derjenigen Coordinaten, durch welche der Ort eines Punctes auf der Oberfläche des Körpers bestimmt wird. Diese gegebene Function mag mit F bezeichnet werden.*)

*) Handelt es sich z. B. um die Lösung des Problemes für den von uns betrachteten Ring, so wird dieses F eine gegebene Function von ω und φ sein; denn ω und φ sind ja diejenigen Coordinaten, durch welche der Ort eines Punctes auf der Oberfläche unseres Ringes seine Bestimmung findet.

Ferner mag sogleich bemerkt werden, dass unter s und σ immer Puncte verstanden werden sollen, welche irgendwo auf der Oberfläche des Körpers liegen. Andererseits soll i einen Punct vorstellen, der sich im Innern des Körpers befindet; und endlich a stets einen Punct bezeichnen, der ausserhalb des Körpers liegt. Der Punct i soll sich im Innern des Körpers beliebig bewegen, auch bis zu seiner Oberfläche hin fortgehen können, die Oberfläche aber niemals überschreiten dürfen. Und ebenso soll sich a in demjenigen Raume, der ausserhalb des Körpers liegt, beliebig bewegen, und von Aussen her bis zur Oberfläche des Körpers hingelangen können, aber ebenfalls diese Fläche niemals überschreiten dürfen.

Nachdem wir solches festgesetzt haben, können wir nun dem Probleme, um welches es sich hier handelt, wie sich leicht übersehen lässt, auch folgende Fassung geben:

Es soll die Oberfläche des Körpers der Art mit Masse belegt werden, dass das von dieser Belegung auf einen Punct i ausgeübte Potential einen Werth besitzt, welcher, sobald sich i nach irgend einer Stelle der Oberfläche des Körpers hinbewegt, immer demjenigen Werthe gleich wird, welchen die gegebene Function F an jener Stelle der Oberfläche besizt.

Ist nämlich eine Massenbelegung gefunden, welche die hier verlangte Eigenschaft besitzt, so wird das von dieser Massenbelegung auf einen Punct i ausgeübte Potential denjenigen Werth vorstellen, welchen die gesuchte Temperatur des Körpers im Puncte i besitzt.

Ist q_σ die Dichtigkeit einer beliebigen Oberflächen-Belegung im Puncte σ, so ist das von dieser Belegung auf einen Punct i ausgeübte Potential V_i von folgendem Werthe:

$$V_i = S\ T_{i\sigma} q_\sigma dO_\sigma ,$$

wo $T_{i\sigma}$ die reciproce Entfernung zwischen i und σ, ferner dO_σ ein bei σ liegendes Oberflächenelement vorstellt, und endlich S eine über die ganze Oberfläche ausgedehnte Integration andeutet. Dem zuvor Gesagten zufolge wird also der Werth V_i, welchen dieses Potential im Puncte i besitzt, die gesuchte Temperatur im Puncte i vorstellen, sobald es nur gelingt, die Dichtigkeit q_σ der

Art zu bestimmen, dass V_i, sobald i nach irgend einem Puncte s hinrückt, gleichwerthig wird mit F_s, d. h. gleich wird demjenigen Werthe, welchen die gegebene Function F im Puncte s besitzt.

Gelingt es also — so können wir uns kurz ausdrücken — q_σ der Art zu bestimmen, dass für alle Puncte s

$$(1.)\quad S\, T_{s\sigma} q_\sigma dO_\sigma = F_s$$

ist, so wird alsdann das durch die Formel

$$(2.)\quad S\, T_{i\sigma} q_\sigma dO_\sigma = V_i$$

bestimmte V_i denjenigen Werth vorstellen, welchen die gesuchte Temperatur des Körpers im Puncte i besitzt.

Die Aufgabe, um welche es sich hier handelt, lässt sich nun zurückführen auf eine einfachere Aufgabe.

Wir wollen uns irgendwo im Innern des Körpers einen Punct i mit der Masse $+1$ gegeben denken, und uns ferner eine Oberflächenbelegung des Körpers denken, welche, was ihre Einwirkung auf äussere Puncte anbelangt, ersetzt werden kann durch die im Puncte i vorhandene Masse $+1$, welche also so beschaffen ist, dass ihre Einwirkung auf äussere Puncte vollständig aufgehoben wird, sobald wir in dem gegebenen Punct i eine Masse von der Grösse -1 anbringen, und diese gleichzeitig mit in Wirkung treten lassen.

Eine derartige Massenbelegung wird, wie sich leicht nachweisen lässt, immer existiren, nämlich existiren, welche Form der gegebene Körper, und welche Lage der gegebene Punct i im Innern des Körpers auch immer haben mag. Ich werde diese Belegung, welche eben nur von geometrischen Verhältnissen, nämlich nur von der Form des Körpers und von der Lage des innern Punctes i abhängt, „die dem Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung“ nennen; und nun zeigen, wie sich das Wärme-Problem, um dessen Lösung es sich hier handelt, immer mit Leichtigkeit absolviren lässt, sobald diese Oberflächenbelegung gefunden ist.

Wir wollen die Dichtigkeit, welche die dem gegebenen Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung im Puncte s besitzt, mit H_s, oder genauer mit H_s^i bezeichnen. Der obere Index i soll nämlich andeuten, dass der Werth von H_s^i nicht allein von der Lage des Oberflächenpunctes s, sondern gleichzeitig auch noch von der Lage des gegebenen innern Centrums i abhängt. Der

Definition dieser Oberflächenbelegung zufolge wird dann für jeden Punct a

$$(3.)\quad S\ T_{as} H_s^i dO_s = T_{ai}$$

sein. Und zwar wird diese Gleichung gültig bleiben, wenn sich a ausserhalb des Körpers beliebig bewegt, sogar dann, wenn a während seiner Bewegung bis zur Oberfläche des Körpers hin fortschreitet. Es wird also diese Gleichung gültig bleiben, wenn wir den Punct a mit irgend einem Puncte σ vertauschen; folglich

$$(4.)\quad S\ T_{\sigma s} H_s^i dO_s = T_{\sigma i}$$

sein.

Setzen wir nun in (2.) für $T_{\sigma i}$ den Werth (4.) ein, so folgt:

$$SS\ q_\sigma T_{\sigma s} H_s^i dO_s dO_\sigma = V_i,$$

d. i.

$$S(S\ T_{s\sigma} q_\sigma dO_\sigma)\ H_s^i dO_s = V_i.$$

Und hieraus ergiebt sich durch Anwendung der Formel (1.) sofort:

$$(5.)\quad S\ F_s H_s^i dO_s = V_i.$$

Ist nun die dem Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung gefunden, der Werth von H_s^i also bekannt, so finden sich hier auf der linken Seite nur bekannte Grössen vor; denn F_s stellt ja eine gegebene Function vor. Andererseits befindet sich auf der rechten Seite die gesuchte Temperatur des Körpers, nämlich derjenige Werth V_i, welchen diese Temperatur im Puncte i besitzt. Demnach ist also die vorhin ausgesprochene Behauptung als richtig documentirt, nämlich gezeigt, dass man V_i sofort finden kann, sobald es gelungen ist die dem Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung zu ermitteln.

Wir können das erhaltene Resultat kurz so zusammenfassen:

Befindet sich ein Körper auf seiner Oberfläche ringsum mit beliebig gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact, so findet man die Temperatur V_i, welche unter diesen Umständen nach Eintritt des stationären Zustandes in irgend einem Puncte i des Körpers vorhanden sein wird, durch Anwendung folgender Formel:

$$(6.)\quad V_i = S\ F_s H_s^i dO_s.$$

Hier stellt F_s die gegebene Temperatur vor, welche der Körper in Folge der ihn berührenden Wärmequellen im Oberflächenelemente dO_s besitzt. Und andererseits stellt hier H_s^i diejenige Dichtigkeit vor, welche die dem Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung, ebenfalls im Elemente dO_s, besitzt.

Um also das vorliegende Wärme-Problem für unseren Ring zu lösen, wird es nur erforderlich sein, hier beim Ringe die einem gegebenen Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung zu ermitteln. Wir bezeichnen die Masse, welche bei dieser noch unbekannten Belegung auf irgend einem Oberflächenelement dO_s des Ringes vorhanden ist, wiederum mit $H_s^i dO_s$, und machen, was den Werth dieser Masse anbelangt, folgenden Ansatz:

$$(7.)\quad H_s^i dO_s = \frac{1}{R_s} \sum_{p\,q}\sum K_p^q \cos p(\omega_s - \omega_i) \cdot \cos q(\varphi_s - \varphi_i) \cdot d\omega_s \cdot d\varphi_s,$$

wo die Grössen K_p^q unbekannte Constanten vorstellen sollen. λ_i, ω_i, φ_i und λ_s, ω_s, φ_s sollen die Coordinaten der Puncte i und s sein; λ_s wird dann $= c$, nämlich gleich dem gegebenen Parameter unseres Ringes sein. Ferner soll R_s den Werth der (auf Seite 34.) eingeführten Function

$$R = \sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}$$

im Puncte s vorstellen, also $= \sqrt{1 - 2c \cos\omega_s + c^2}$ sein.

Die dem Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung des Ringes ist dadurch definirt, dass sie in Bezug auf alle äusseren Puncte von gleichem Potential ist mit einer im Centrum i gedachten Masse $+1$. Demnach ist die Dichtigkeit H_s^i dadurch definirt, dass für alle Puncte a

$$(8.)\quad S\, T_{as} H_s^i dO_s = T_{ai}$$

sein muss. Und es müssen daher die in H_s^i (7.) enthaltenen Constanten K_p^q so bestimmt werden, dass dieser Gleichung Genüge geschieht. Bezeichnet man die Coordinaten des Punctes a mit λ_a, ω_a, φ_a, und beachtet man, dass in Folge der Lage, welche die Puncte i, s, a besitzen, immer

$$\lambda_i \;<\; \lambda_s = c \;<\; \lambda_a$$

ist, so ergiebt sich aus unserer für die reciproce Entfernung zweier Puncte gefundenen Entwickelung (Seite 33) sofort:

$$(9.)\quad T_{as} = R_a R_s \cdot \sum_p \sum_q C_p^q \, J_p^q(c) \cdot A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega_a - \omega_s) \cos q(\varphi_a - \varphi_s),$$

$$(10.)\quad T_{ai} = R_a R_i \cdot \sum_p \sum_q C_p^q \, J_p^q(\lambda_i) \cdot A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega_a - \omega_i) \cos q(\varphi_a - \varphi_i).$$

Durch Substitution von (7.) und (9.) ergiebt sich für das in (8.) stehende Integral folgender Werth:

$$S\, T_{as} H_s^i dO_s = 4\pi^2 R_a \sum_p \sum_q K_p^q \, C_p^q \, J_p^q(c) \; A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega_a - \omega_i) \cos q(\varphi_a - \varphi_i).$$

Diese Entwicklung muss demnach zufolge (8.) für jede beliebige Lage des Punctes a identisch sein mit der Entwicklung von T_{ai} in (10.). Daraus folgt:

$$4\pi^2 \, K_p^q \, C_p^q \, J_p^q(c) = R_i \, C_p^q \, J_p^q(\lambda_i),$$

mithin:

$$(11.)\quad K_p^q = \frac{R_i \, J_p^q(\lambda_i)}{4\pi^2 \, J_p^q(c)}.$$

Demnach erhält man schliesslich, wenn man diese Werthe der K_p^q in (7.) substituirt, für die Dichtigkeit der dem Centrum i entsprechenden Oberflächenbelegung des Ringes folgenden Ausdruck:

$$(12.)\quad H_s^i dO_s = \frac{R_i \, d\omega_s \, d\varphi_s}{4\pi^2 \, R_s} \sum_p \sum_q \frac{J_p^q(\lambda_i) \cos p(\omega_s - \omega_i) \cdot \cos q(\varphi_s - \varphi_i)}{J_p^q(c)}.$$

Und für die im Puncte i herrschende unbekannte Temperatur V_i hat man alsdann mit Benutzung dieses Ausdrucks den Werth:

$$V_i = S\, F_s H_s^i dO_s,$$

wo F_s die gegebene Temperatur der Oberfläche vorstellt.

Wir kommen demnach, was die hier über den Ring vorliegende Wärmeaufgabe anbelangt, zu folgendem Resultat:

Befindet sich die Oberfläche des Ringes in einer beliebig gegebenen und unveränderlichen Temperatur, so hat man, um die nach Eintritt des stationären Zustandes in irgend einem innern Puncte i des Ringes herrschende Temperatur V_i zu ermitteln, zuerst folgenden Ausdruck zu bilden:

$$\eta_s^i = \sum_p \sum_q \frac{J_p^q(\lambda_i) \cos p(\omega_s - \omega_i) \cdot \cos q(\varphi_s - \varphi_i)}{J_p^q(c)}.$$

Hier ist c der Parameter des Ringes. Ferner sind $\lambda_s = c$, ω_s, φ_s die Coordinaten irgend eines Punctes s der Oberfläche, und λ_i, ω_i, φ_i die Coordinaten des Punctes i. Endlich stellt $J_p^q(x)$ die Function vor:

$$J_p^q(x) = \frac{(1-x^2)^q}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\Theta \cdot d\Theta}{\left(1 - 2x \cos \Theta + x^2\right)^{\frac{2q+1}{2}}} .$$

Ist dieser Ausdruck η_s^i gebildet, so erhält man dann die gesuchte, im Puncte i herrschende Temperatur V_i durch Anwendung folgender Formel:

$$V_i = \frac{\sqrt{1-2\lambda_i \cos \omega_i + \lambda_i^2}}{4\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\eta_s^i \cdot F_s \cdot d\omega_s \, d\varphi_s}{\sqrt{1-2c \cos \omega_s + c^2}},$$

wo F_s die für den Punct s gegebene Oberflächentemperatur bezeichnet.

Halle, Druck der Waisenhaus-Buchdruckerei.

UEBER DIE

GLEICHGEWICHTS-FIGUREN

HOMOGENER FREIER

ROTIRENDER FLÜSSIGKEITEN

VON

DR. LUDWIG MATTHIESSEN,

PRIVATDOCENT IN KIEL.

NEBST EINER FIGURENTAFEL.

KIEL.

SCHWERS'SCHE BUCHHANDLUNG.

1857.

Die Theorie des Gleichgewichts und der Oberflächengestalt der Flüssigkeiten ist eine der ältesten, womit sich die Physiker beschäftigt haben. Schon beim Aristoteles trifft man einige Betrachtungen über diesen Gegenstand an; in seinem zweiten Buche vom Himmel im vierten Capitel sucht er zu beweisen, dass die Oberfläche des Meeres nicht anders im Gleichgewicht sein könne, als wenn sie eine Kugelfläche bilde; dies komme daher, dass alle Wassertheilchen gleich stark nach dem Mittelpuncte der Erde hinstrebten, und dass, wenn ein Stück von der flüssigen Kugel abgeschnitten würde, die nächsten Theilchen den Abschnitt sogleich anfüllen müssten, um dem Mittelpuncte näher zu kommen. Obwohl lange nachher von Huyghens und Newton ein theoretischer Beweis für die Polar-Abplattung der Erde gegeben wurde, ist die Theorie der Figur der Planeten, die zu den schwierigsten Theilen der Mechanik gehört, obgleich physikalisch correct, dennoch wenig vervollkommt worden, da mathematische Schwierigkeiten sich selbst der Lösung des Fundamentalproblems: die Gleichgewichtsfigur homogener flüssiger Planeten zu bestimmen, in den Weg gestellt haben. Die vorliegende Abhandlung liefert nun eine Methode der Untersuchung, durch welche dies Capitel in ein neues Licht gestellt wird, und durch welche alle möglichen Gleichgewichtsfiguren der homogen flüssigen Körper, mit Ausschluss derjenigen flüssigen Systeme, welche aus getrennten Massen bestehen und derjenigen, bei denen der Schwerpunct nicht innerhalb der Oberfläche liegt, unter eine exacte Formel gebracht werden. Ich überlasse sie hiemit dem freien Urtheile Derjenigen, welche sie zur Vervollkommnung der

Laplace, Mémoire sur la figure de la Terre. Paris (1818.)
— Mécanique céleste. Uebersetzt von I. C. Burckhardt. Berlin (1802) 4°. Tom. II cap. 1–4.
— Traité de méc. cél. Tom. V. Paris 1825.
Legendre in den Mémoires de l'acad. des sciences de Paris 1788, 1789 pg. 372.
Kästner, A. G., Ueber die sphäroidische Gestalt der Erde in seiner: Weiteren Ausführung der mathem. Geographie. Göttingen (1795) 8°. 112–206.
Klügel, Untersuchungen über die Figur der Erde, in Bode's astron. Jahrb. (1787) 165.
Ide, Theorie der Bewegung der Weltkörper unseres Sonnensystems und ihrer elliptischen Figur, nach Laplace frei bearbeitet. Berlin 1800. 2ter Theil pg. 129.
Poselger. Ueber die Figur der Erde. In den Abhandlungen der Berliner Academie. (1830).
Puissant, L. Traité de Geodésie. Paris 1805. 4° 125–222. Tom. II (1807) 61.
Bossut, C. Capitel: Gestalt der Erde; in seinem: Versuch einer allgem. Geschichte der Mathematik, übersetzt von Reimer. Hamburg (1804) 8° 2ter Theil 333 u. 369—375.
Ivory, James, On the attractions of homogeneous ellipsoids. Phil. Trans. (1809) I. 345.
— On the equilibrium of fluids and the figure of a homogeneous planet in a fluid state. Philos. Trans. (1824) pg. 85 (1831) I, 109.
— On the equilibrium of a mass of homogeneous fluid at liberty. Phil. Trans. (1834) II, 491. Phil. Mag. LXVI 321. 428.
— Of such ellipsoids consisting of homogeneous matter as are capable of having the resultant of the attraction of the mass upon a particle in the surface, and a centrifugal force caused by revolving about one of the axes, made perpendiculare to the surface. Phil. Tr. (1838) 57.

Timmermans, dissertatio de figura Terrae, tum hydrostaticae legibus, tum observationibus determinata. Gandae (1822) 4°.

Walbeck, dissertatio de forma et magnitudine Telluris. Aboae 1819.

Muncke, Artikel: Erde, in Gehler's neuem physikal. Wörterbuch. III. D. 920.

Schmidt, Ed. Lehrbuch der math. u. phys. Geographie. Göttingen (1829) P. I. 241 u. f.

de Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde. Tom. II. Paris 1829—34.

— Ueber Jacobi's Theorem in d. astron. Nachr.

Gauss, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Göttingae 1830. in comm. soc. reg. scient. Göttingensis. Tom. VII. 39.

Poisson, Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoide homogène (1833).

— Note relative à l'attraction d'un ellipsoide heterogène. Connais. des Temps pour l'an 1837. Paris (1834).

— Ueber die Fig. der Erde. Ann. de Chem. et Phys. XXX. 225.

Claussen, Thomas, Beweis des von Jacobi gefundenen Lehrsatzes etc. Astron. Nachr. (1841) Bd. 18. Nro. 418.

Meyer, C. O. De aequilibrii formis ellipsoidicis. Journal von Crelle. Bd. 24. (1842) Nro. 6.

Plana, J. Reflexions sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides qui recouvrent un sphéroide solide à-peu-près sphérique. Gènes 1821.

— Note sur la figure de la terre et la loi de la pesanteur à sa surface, d'après l'hypothèse d'Huyghens publiée en 1690. Astron. Nachr. 35. Altona 1853. Nro. 839. p. 373.

— Mém. sur la théorie mathématique de la fig. de la Terre; publiée par Newton en 1687. Et sur l'état d'équilibre de l'ellipsoide fluide à trois axes inégaux. Astron. Nachr. 36. Nro. 850.

Plana, J. Mémoire sur la loi des pressions et la loi des ellipticités des couches terrestres. ibid. Nro. 860.

Duhamel, Cours de mécanique. Paris (1845) § 142. 143.

Liouville, J. Sur la loi de pesanteur à la surface ellipsoidale d'équilibre d'une masse liquide homogène. Journ. de Math. t. VIII. 360.

— Sur les figures ellipsoidales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène. ibid. XVI. 241.

Beer, Ueber die Oberflächen rotirender Flüssigkeiten im Allgemeinen, insbesondere über den Plateau'schen Rotationsversuch. Pogg. Ann. Bd. XCVI. (1855) pg. 1. 210. (1857) pg. 459.

Naumann, C. Fr. Theoretischer Beweis für die Polar-Abplattung der Erde; in seinem Lehrbuch der Geognosie. Leipzig (1857) Bd. I pg. 19.

Ueber die

permanenten Gleichgewichtsfiguren solcher homogener Flüssigkeitsmassen, bei denen der Schwerpunct innerhalb ihrer Oberfläche liegt.

Historische Einleitung.

Die rotatorischen Bewegungen der Flüssigkeiten, insbesondere die aus ihnen entspringenden Oberflächengestalten sind in neuester Zeit wieder ein Gegenstand mathematischer und physikalischer Untersuchungen geworden. Namentlich ist dies durch den Plateau'schen Rotationsversuch wieder in Anrege gebracht, welcher von Beer in Bonn in Pogg. Ann. (1855) I. 210, (1857) 459 analytisch behandelt worden, worauf meines Wissens über die Oberflächen der um eine Axe rotirenden Flüssigkeiten nichts publicirt ist. Die vorliegende Arbeit zielt aber auf die Lösung des früher gestellten Problemes hin, welches bald nach dem Erscheinen der Newton'schen „Principien" ein Gegenstand mühevoller und meist vergeblicher Untersuchungen der Astronomen und Mathematiker wurde und es auch bis in unsre Zeit geblieben ist. Es handelte sich nämlich darum, a priori alle möglichen Gleichgewichtsfiguren einer homogen flüssigen Masse zu bestimmen, welche aus Molecülen besteht, die sich gegenseitig nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernungen anziehen, während die ganze Masse sich um eine Axe mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit dreht. Die Aufgabe wird unendlich

viel schwieriger, ja ihre Lösung scheint unmöglich zu sein, wenn man die Masse als aus heterogenen Flüssigkeiten, die sich nach dem Gesetz der Schwere ordnen, zusammengesetzt betrachtet. Ich beschränke mich daher hier auf die Lösung des Fundamentalproblems, auf den Fall der Homogeneität.

Maclaurin war bekanntlich der erste, der in seiner Schrift: „De causa physica fluxus et refluxus maris“ (1742) die Annahme Newtons, dass der terrestrische Meridian für den Fall der Homogeneität unsres Planeten eine elliptische Krümmung habe, synthetisch als richtig bewies. Indess blieb die Theorie unvollkommen, so lange nicht durch eine directe Untersuchung alle möglichen Gleichgewichtsfiguren bestimmt waren. Legendre, Laplace und zuletzt Ivory fassten die Aufgabe von diesem Gesichtspunkte auf und gelangten, wiewol auf sehr schwierigem Wege zu dem Resultate, dass die Flüssigkeitsmasse die Figur eines Rotationsellipsoides annehmen müsse. Doch ist hiebei die Untersuchung stillschweigends nur auf eine specielle Klasse von Figuren ausgedehnt, da ja Laplace selbst bei Gelegenheit der Saturnringe in seiner „Mechanik des Himmels“ nachzuweisen gesucht hat, dass es andere Gleichgewichtsfiguren geben kann. Die vorliegende Abhandlung enthält nun ebenfalls hauptsächlich die Untersuchung einer bestimmten Klasse von Figuren und zwar aller derjenigen, bei welchen der Schwerpunkt innerhalb ihrer Oberfläche liegt. Am Schlusse dieser Arbeit werde ich dann auch einen speciellen Fall der andern Klasse von Figuren behandeln, nämlich die ringförmige. Ueber seine analytischen Untersuchungen über die Figur der Erde berichtet Laplace in seinem Traité de méc. cél. Tom V. Paris (1825).

Sehr überraschend für die Mathematiker war die Entdeckung Jacobi's, welche in den Conn. des Temps pour l'an 1837 Paris (1834) in einem Bericht von Poisson angekündigt wurde, dass nämlich auch ein dreiaxiges Ellipsoid unter den gedachten Verhältnissen eine Gleichgewichtsfigur sein könne. Indess war

dies schon früher durch Ivory in der Theorie begründet, wenngleich vernachlässigt und durch einen falschen Schluss bei Seite geschoben worden, wie man sich beim Durchlesen seiner Arbeiten in den Phil. Trans. (1831) (1834) davon überzeugen kann.

Um sich auf den bisherigen Standpunkt der Frage stellen zu können, ist es nothwendig sich mit den vortrefflichen Arbeiten von James Ivory, Thom. Claussen und O. Meyer, so wie mit den Abhandlungen von Jean Plana in Turin bekannt zu machen. Die Arbeiten von Ivory finden sich in den Phil. Trans. (1824) (1831) (1834) (1838), die Abhandlung von Claussen über das dreiaxige Ellipsoid in den „Astronomischen Nachrichten" (1841) Nro. 418, die von O. Meyer in Crelle's Journal (1842) Bd. 24, 6. Die Abhandlungen von Plana sind in den Astronomischen Nachrichten (1853) publicirt. Uebrigens hat man sich über dies Problem, von dem Pontécoulant in seiner Théor. analyt. II sagt: „Cette question dans toute sa généralité surpasse les forces de l'analyse," seit Newton den Kopf zerbrochen, ohne dass man zu einer ordentlichen Theorie gelangte. Hier scheint in der That die Superiorität der Analysis über die Synthese gefährdet zu sein, aber sie muss sich schrittweise den Sieg verschaffen. Durch die folgenden Untersuchungen ist der Ausspruch Pontécoulants wenigstens theilweise widerlegt; die Einfachheit der Resultate, gewonnen nach vielen und unermüdlich auf diesen Feind der Analysis gerichteten Angriffen, bewährt die Worte von Lagrange in seiner méc. analyt. Tom 11: „Ce „n'est jamais par les routes les plus simples et les plus di- „rectes, que l'esprit humain parvient aux vérités de quelques „genres qu'ellent soient."

§ 1.

Allgemeine Gleichungen des Gleichgewichts der Flüssigkeiten — Niveauflächen.

Es sollen hier zuerst in möglichster Kürze die Bedingungen des Gleichgewichts der gesuchten Figuren und ihre allgemeinen Gleichungen festgestellt werden. Betrachten wir die Wirkung der Kräfte auf die im Innern der Flüssigkeitsmasse gelegenen Partikeln für jedes beliebige Gravitationsgesetz, so ergeben sich folgende Sätze.

1. Es existiren Puncte, Linien und möglicherweise auch Flächen, für die alle drei Componenten der Anziehung eines im Gleichgewicht befindlichen Körpers, nämlich X, Y und Z, verschwinden; mit einem dieser Puncte fällt stets der Schwerpunct des Systems zusammen, mag dieser innerhalb oder ausserhalb der Masse befindlich sein.

Es möge PKP′K′ (Fig. 1) eine freie homogene flüssige Masse darstellen, die sich im Gleichgewicht befindet und um eine durch ihren Massenmittelpunct O gehende Axe PP′ rotirt, während ihre Theilchen sich nach irgend welchen Gesetzen anziehen. Die einzelnen Massenelemente werden durch Kräfte sollicitirt, welche im Allgemeinen nach dem Innern gerichtet sind. Alle diese Kräfte lassen sich nach den Richtungen dreier rechtwinkliger Coordinaten x, y, z schätzen. Seien X, Y, Z die Summen aller Partialkräfte. Ist alsdann u v ein unendlich dünner Kanal der Flüssigkeit, welcher parallel mit der Axe von einem Punct der Oberfläche zu einem andern gezogen ist, so ist eine nothwendige Bedingung des Gleichgewichts, dass die Kräftesumme X, welche auf die Molecüle des Kanals wirkt, gleich Null ist. Dasselbe gilt von allen Kanälen, welche parallel y und z laufen. Die Kräfte X, Y, Z, welche an den Enden des Kanals angreifen, sind nothwendig nach Innen gerichtet und wirken nach entgegengesetzten Richtungen. Es muss also X, indem es sich in der

ganzen Länge des Kanals fortwährend ändert, wenigstens einmal gleich Null werden, darauf das Zeichen wechseln, und wenn die ganze Masse in solche Kanäle getheilt wird, werden alle diese Nullpuncte wenigstens eine continuirliche Fläche bilden, welche sich durch die ganze Masse erstreckt. Gleicherweise wird es noch andere innere Flächen geben, die aus solchen Puncten bestehen, für welche die Kräfte Y und Z verschwinden. Die Durchschnitte je dreier solcher Flächen werden einen oder mehrere Puncte, Linien oder Flächen bestimmen innerhalb des Fluidums, für welche die drei Partialkräfte verschwinden. Für den Kundigen führe ich hier als Beispiel an das Rotationsellipsoid, den Ring und den unendlichen Discus im Gleichgewicht.

Bei der Betrachtung des Gleichgewichts einer freien rotirenden Flüssigkeit können wir abstrahiren von einer Bewegung, welche allen Theilen gemeinschaftlich ist, und von Kräften, durch welche alle mit gleicher Intensität nach derselben Richtung getrieben werden. Die Grösse der gemeinsamen Bewegung ist der des Schwerpunctes des Systems gleich. Die Kräfte aber, die sich das Gleichgewicht halten sollen, sind nur von der Art, dass sie die relative Lage der Theilchen zu verändern streben. Da nun die Axendrehung eines jeden freien Systems um seinen Schwerpunct von Statten geht und dieser eben nur durch jene ausserordentlichen Kräfte, von denen wir hier abstrahiren, bewegt werden würde, so muss der Schwerpunct des Systems in Ruhe bleiben und frei sein von den Wirkungen jener Partialkräfte X, Y, Z. Daraus geht hervor, dass der Schwerpunct des Ganzen mit einem Puncte zusammenfallen, oder in einer solchen Linie oder Fläche liegen muss, für welche die drei Kräfte verschwinden.

2. Das Gleichgewicht eines freien flüssigen Systems wird nicht gestört durch einen Druck, der mit gleicher Intensität gegen alle Theile der Oberfläche ausgeübt wird; wobei unter Grösse des Druckes natürlich die Intensität desselben auf die Einheit der

Oberfläche normal wirkend zu verstehen ist. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Grundeigenschaft einer incompressiblen Flüssigkeit, dass sie den Druck, der auf die Oberfläche ausgeübt wird, nach allen Richtungen ungeschwächt fortpflanzt. Was von dem Ganzen gilt, lässt sich nun auch auf jedes einzelne Massenelement anwenden und man kann sagen: zur Herstellung des Gleichgewichts der betrachteten Flüssigkeitsmasse ist die alleinige Bedingung zureichend: dass jedes Theilchen der Flüssigkeit von allen Seiten gleich gedrückt werde. Indess ist diese Bestimmung für die Ableitung der Oberflächengleichung unzureichend, da ja für jedes andere Gesetz der Gravitation die Figur sich ändern muss, also auch noch jenes mit in Betracht zu ziehen ist.

3. Es wird an dem Gleichgewicht der schon oben betrachteten Figur PKP′K′ (Fig. 1) nichts geändert, wenn wir uns einen unendlich dünnen Kanal KK′ mit einer festen Wand durch die ganze Masse hindurchgezogen denken. Da die Kräfte an den Enden des Kanals nach dem Innern gerichtet sind, so lässt sich der Kanal mit communicirenden Röhren vergleichen, in denen die Flüssigkeit im Gleichgewichte ist, so dass der hydrostatische Druck mit der Tiefe oder nach dem Innern im Allgemeinen wächst, für die beiden Enden K in K′ aber und für die Puncte der gesammten Oberfläche gleich Null ist. Im Innern des Kanals werden sich dann stets wenigstens zwei Puncte angeben lassen, die von der darüber ruhenden Flüssigkeit gleich gedrückt werden, z. B. S und S′, oder die beiden ihnen unendlich nahe liegenden Puncte S″ und S‴. Denn wenn wir der in Rede stehenden Masse alle Eigenschaften einer vollkommen flüssigen Masse zuschreiben, muss sich der von jedem Theilchen ausgeübte Druck durch die ganze Masse hindurch gleichmässig fortpflanzen, also der hydrostatische Druck von der Oberfläche bis zum Massenmittelpuncte sich continuirlich abändern. Hieraus geht hervor, dass es innerhalb der Masse continuirliche und geschlossene Flächen geben muss, welche von allen Seiten einen

gleichen Druck erleiden und welche zuletzt mit der obersten Fläche constanten Druckes, nämlich mit der Oberfläche coincidiren. Sei nun der Druck in den höher liegenden Puncten S und S′ gleich p in den beiden andern S″ und S‴ gleich $p + dp$; alsdann sind diese vier Punkte paarweis Puncte zweier unendlich nahe liegenden Flächen gleichen Druckes. Ist die Länge des Kanals zwischen je zweien von diesen ds und ds′; sind ferner die sollicitirenden Kräfte nach der Richtung der Tangente des Kanals beziehlich T und T′, die Basis desselben gleich m, die Dichte der in SS′ und S′S‴ befindlichen Flüssigkeit ϱ und ϱ', so erfordert der non-effect der entgegengesetzten Kräfte

$$- mdp = m\varrho Tds = m\varrho' T' ds'$$

$$\text{oder} - dp = \varrho Tds = \varrho' T' ds' \qquad (1).$$

Aus dieser Formel ergibt sich nun leicht, dass die Gravitation der Molecüle in jeder unendlich dünnen Schicht gleichen Druckes normal gegen ihre Begrenzungsflächen gerichtet ist. Zerlegen wir nämlich die Resultante aller Kräfte, welche auf das Massenelement m.ds wirken, nach den Richtungen dreier rechtwinkliger durch den Massenmittelpunct gelegten Coordinatenaxen, so dass die x Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt und setzen X, Y, Z gleich den Summen aller Partialwirkungen respective nach x, y, z, so ist

$$T = X\frac{\delta x}{\delta s} + Y\frac{\delta y}{\delta s} + Z\frac{\delta z}{\delta s}$$

$$\text{mithin} - \delta p = \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \qquad (2).$$

Ziehen wir nun den Kanal so, dass er einen Augenblick in einer Curve gleichen Druckes verläuft, so gehen die Variationen δx, δy, δz, δs, δp über in dx, dy, dz, ds und dp; da indess p constant bleibt, geht dp in Null und die Gleichung (2.) über in folgende

$$o = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (3).$$

Hieraus geht denn hervor, dass die Resultante der auf eine Fläche gleichen Druckes wirkenden Kräfte in jedem ihrer Puncte

normal gerichtet ist. Man hat die Flächen dieser Eigenschaft Niveauflächen genannt und da für die Oberfläche p gleich o ist, so geht die Reihe der Niveauflächen endlich in diese über. Vermittelst der eben entwickelten Thatsachen lässt sich nun nachweisen, dass für die Flächen oder unendlich dünnen Schichten constanten Druckes ϱ constant, also in Formel (1) ϱ gleich ϱ' sein muss. Denn angenommen, es sei SS'S''S''' (Fig. 2. a) ein Theil einer solchen Schicht und die Dichte ϱ in SS'' verschieden von der Dichtigkeit ϱ' in S'S''', so würden sich (möge dieser Uebergang allmählich oder plötzlich wie in Fig. 2. b geschehen) immer zwei zusammengrenzende Gruppen von flüssigen Molecülen angeben lassen wie in Fig. 2. c, worin die Molecüle von allen Seiten gleiche Pressungen erleiden, die Gruppe aa' aber specifisch schwerere Molecüle enthält als bb'. Da nun die Theilchen durch die eigne Gravitation gegen die tieferliegende Fläche a'b' getrieben werden und zwar normal wie (3) verlangt, so ist der Druck in der untersten Reihe von Molecülen der Gruppe aa' grösser als in der benachbarten untersten Reihe der Gruppe bb': die schwereren Molecüle würden mithin in die leichteren einsinken.

Aus der Formel (2) folgt nun, dass die andere Seite dieser Gleichung die Variation einer Function von x, y, z ist. Diese Function sei ausgedrückt durch φ (x, y, z), so ist

$$C - p = \varphi(x, y, z)$$

die endliche Gleichung aller Niveauflächen und sie gibt den in jedem beliebigen Puncte x, y, z stattfindenden Druck an. Die Gleichung der Oberfläche ist alsdann, falls sie eine singuläre Form annimmt

$$C = \varphi'(x, y, z)$$

und ihre Differenzialgleichung

$$o = \varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

so dass man hat

$$\varrho X = \frac{d\varphi}{dx}; \quad \varrho Y = \frac{d\varphi}{dy}; \quad \varrho Z = \frac{d\varphi}{dz}.$$

§ 2.

Ueber die Kräfte, welche zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen wirken. — Aehnlichkeit der Niveauflächen.

Um die endliche Gleichung der Niveauflächen oder jene Function φ (x, y, z) bestimmen zu können, müssen wir die Natur der innerhalb zweier unendlich nahen Niveauflächen wirkenden Kräfte noch genauer untersuchen. Das Gleichgewicht einer freien Flüssigkeit wird der Natur der vollkommenen Flüssigkeiten gemäss nicht gestört werden, wenn ein Druck von gleicher Intensität gegen alle Theile der Oberfläche ausgeübt wird und wir setzen hier überall eine incompressible Flüssigkeit voraus. Ein solcher Druck wird nun veranlasst durch eine Schicht, welche von zwei unendlich nahen Niveauflächen NV und N′V′ eingeschlossen ist, und zwar auf die darunter befindliche Oberfläche N′V′ (Fig. 3). Ist die Dichte der ganzen Masse verschieden, so wird sie doch innerhalb zweier unendlich nahen Niveauflächen als constant betrachtet werden dürfen. Da sich zwei Niveauflächen nie schneiden können, indem sonst an diesen Stellen der Druck unbestimmt sein und nicht den constanten Werth behalten würde, der einer und derselben Niveaufläche in ihrer ganzen Ausdehnung zugeschrieben werden muss, so kann die Dicke der Schicht so unendlich klein genommen werden, dass man stets je zwei einander gegenüberliegende Flächenelemente oder Bogen als parallel betrachten darf. An der Betrachtung wird nichts geändert werden, wenn wir die Dicke der Schicht, welche allgemein mit δn bezeichnet werden kann, unendlich klein von der zweiten Ordnung nehmen, so dass δn oder eine geneigte Dimension der Schicht, früher mit δs bezeichnet, im Verhältniss zum Bogenelement von N′V′, also gegen ds unendlich klein ist. Man ziehe nun durch eine und dieselbe Schicht zwei oder mehrere beliebige gerade Kanäle $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, also δs und $\delta s'$ von derselben Basis gleich m und von beliebiger Neigung gegen die beiden Paare von paralle-

len Flächenelementen bei α und β. Dabei ist es nicht nöthig anzunehmen, dass die beiden Kanäle in einer und derselben Ebene liegen, da ja die Curven NV und N′V′ zwei krumme Flächen repräsentiren. Bezeichnen wir nun die nach der Richtung der Kanäle hinwirkenden Partialkräfte respective mit T und T′, so muss nach dem Früheren sein

$$-\,m\delta p = m\varrho T\delta s = m\varrho T'\delta s'$$

$$\text{oder}\quad -\,\delta p = \varrho T\delta s = \varrho T'\delta s' \qquad (4)$$

Bedeuten ferner P und P′ die totalen Accelerationen oder Schwerkräfte in α und β, ausserdem δn und $\delta n'$ die Dicken der Schichten an den beiden Puncten, so wirken P und P′ bekanntlich nach der Richtung der Normalen, von denen die Variationen δn und $\delta n'$ selbst Theile sind. Damit nun ebenfalls die Zunahme des Druckes, nämlich δp von einem Ende des Kanals bis zum andern wiederum auf beiden Stellen dieselbe sei, muss die Gleichung stattfinden

$$-\,\delta p = \varrho P\delta n = \varrho P'\delta n' \qquad (5)$$

Um nichts unklar zu lassen, bezeichnen wir die Winkel, welche die Kanäle $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ mit den beiden Normalen bilden, beziehlich mit ω und ω', so ist

$$\frac{\delta n}{\delta s} = \cos\omega,\quad \frac{\delta n'}{\delta s'} = \cos\omega'.$$

Es kann nämlich das Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ als ein rechtwinkliches, $\alpha'\alpha''$ bei jeder beliebigen Grösse des Winkels ω als eine Gerade betrachtet werden, da nach der Voraussetzung die Dimensionen von δn und δs unendlich viel kleiner anzunehmen sind, als ein Bogenelement der Fläche δs, welches bei unendlicher Kleinheit die Function einer geraden Linie vertritt. Es müssen also auch um so viel mehr seine Theile, nämlich die Projectionen der Kanäle δs und $\delta s'$ auf die untere Fläche, gerade Linien sein. Da nun

$$T = P \cos \omega; \; T' = P' \cos \omega'$$

so ist wiederum

$$T\delta s = P\delta n; \; T'\delta s' = P'\delta n'$$

was sich ebenfalls aus den obigen Gleichungen (4) und (5) für das constante δp würde haben ableiten lassen.

Angenommen, es sei $\gamma\gamma''$ die Drehungsaxe der Masse, Θ ihr Schwerpunct, $\gamma\gamma'$ der unendlich kleine Kanal δa, welcher durch die Niveaufläche N'V' vom radius vector a des Punctes γ abgeschnitten wird, so wird auch δa im Allgemeinen gegen die beiden Niveauflächen eine schiefe Neigung haben und mit den übrigen Kanälen $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ nicht gerade in derselben Ebene liegen. Wenn aber A die diesen bestimmten Punct sollicitirende, nach der Richtung seines rad. vect. γO oder a geschätzte Componente der gesammten Anziehung in γ bezeichnet, so erfordert ebenfalls das Gleichgewicht der Fläche N'V' einen gleichen Druck δp für das Flächenelement γ^1, wobei die Gleichung stattfindet

$$-\delta p = \varrho A \delta a \qquad (6)$$

Da nun A und a hier sich auf einen ganz bestimmten Punct beziehen, nämlich auf den einen Pol des Körpers, so kann hier kein Zweifel obwalten, dass für alle ähnliche Beziehungen der Fläche NV, welche auch in den Gleichungen (4) (5) (6) ausgesprochen sind, diese Grössen A und a als constante zu betrachten sind.

Nehmen wir, um einen Schritt weiter zu thun, noch an, es sei r der rad. vect. irgend eines Punctes k derselben Niveaufläche NV, ferner n_{yz}, n_{xz}, n_{xy} die durch die drei Coordinatenebenen vom Krümmungshalbmesser abgeschnittenen Stücke, also die drei Normalen desselben Punctes, dessen Coordinaten wir mit x, y, z bezeichnen wollen, so ergeben sich leicht noch andere Gleichungen. Wir haben oben vorausgesetzt, dass für alle folgenden Betrachtungen das rechtwinklige Coordinatensystem so durch den

Schwerpunct gelegt sei, dass die x-Axe mit der Rotationsaxe zusammenfiele. Aus (2) und (6) folgt zunächst

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = A\delta a \qquad (7)$$

worin A und δa für die beiden betrachteten Flächen constant bleiben, die Grössen auf der linken Seite der Gleichung aber für alle zu der Oberfläche NV gehörige Puncte (x, y, z) variiren. Wenn man mit R die nach der Richtung des rad. vect. r wirkende Componente der Summe aller die Molekel k sollicitirenden Kräfte bezeichnet, so muss nach dem Vorigen sein

$$-\delta p = \varrho R\delta r = \varrho A\delta a \qquad (8)$$

wo δr die Länge des Kanales kk' bezeichnet. Weil nun

$$R = X \cos \varepsilon + Y \cos \zeta + Z \cos \vartheta$$

ist, wo ε, ζ, ϑ die Winkel sind, welche r mit den drei Coordinatenaxen bildet, so ist klar, dass man hat

$$(X \cos \varepsilon + Y \cos \zeta + Z \cos \vartheta)\delta r = A\delta a \qquad (9)$$

Ferner ist durch eine einfache geometrische Betrachtung leicht abzuleiten

$$n_{yz} = x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$

$$n_{xz} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

$$n_{xy} = z\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

sowie die Gleichungen

$$P = \frac{X}{x}\, n_{yz} = \frac{Y}{y}\, n_{xz} = \frac{Z}{z}\, n_{xy} \qquad (10)$$

Combiniren wir die Gleichungen (5) und (6) einerseits, (7) und (10) andrerseits, so ergibt sich

$$\frac{A}{P} = \frac{\delta n}{\delta a} = \frac{x\delta x}{n_{yz}\,\delta a} + \frac{y\delta y}{n_{xz}\,\delta a} + \frac{z\delta z}{n_{xy}\,\delta a}.$$

Andere Beziehungen für die Schwerkraft P irgend eines Punctes lassen sich herstellen, wenn man sich derjenigen Formeln bedient, welche für alle parallele Flächenelemente gültig sind; also z. B. der bekannten Relation

$$\sqrt{\left(\frac{\partial n}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{dy}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{dz}\right)^2}=\frac{\partial x}{dx}+\frac{\partial y}{dy}+\frac{\partial z}{dz}.$$

Hiernach wäre das Verhältniss der Schwerkraft irgend eines der Puncte von der Oberfläche NV auszudrücken durch

$$\frac{P}{A}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial a}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{dy}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{dz}\right)^2}}{\frac{\partial x}{dx}+\frac{\partial y}{dy}+\frac{\partial z}{dz}}$$

Die Gleichung (9) drückt nun eine Beziehung aus, welche für Niveauflächen homogener und heterogener Flüssigkeitsmassen gültig ist, so wie für jedes beliebige Gravitationsgesetz. Da nur noch die Bestimmung des Letzteren für die Lösung des Problemes fehlt, so ist, wenn dasselbe fixirt ist, daraus nun das für die Ableitung der endlichen Gleichung der Niveauflächen Nöthige zu entnehmen. Wir haben uns bereits im Anfange für dasjenige Gravitationsgesetz entschieden, wonach die Körper sich nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernungen anziehen. Mit diesem Attractionsgesetz ist eine zufällige Eigenschaft der Niveauflächen verbunden und zwar eine sehr einfache. Sie ist in folgendem Satze enthalten:

Wenn eine homogene Flüssigkeit sich um eine Axe dreht und im Gleichgewichte befindlich ist, während sich ihre Partikeln nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung anziehen, wird ebenfalls eine andere Masse von derselben Dichte, mit einer ähnlichen Figur, wenn sie mit derselben Rotationsgeschwindigkeit sich um eine ähnlich gelegene Axe dreht, im Gleichgewichte sein, vorausgesetzt, dass die Theilchen sich nach demselben Gesetze gegenseitig anziehen.

Es sei ABC (Fig. 4) ein homogen flüssiger Körper, der sich um die durch den Massenmittelpunct O gehende Axe PP′ dreht und durch die Wirkung der Gravitation und Centrifugalkraft im Gleichgewichte erhalten wird. Ausserdem sei abc eine andere Masse derselben Art und ähnlich an Gestalt dem ersten Körper, während sie sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die durch ihren Schwerpunct gezogene und zu PP′ ähnlich liegende Axe dreht, so muss diese ebenfalls im Gleichgewichte sein. Denken wir uns nämlich den Körper ABC in unendlich viele Schichten constanten Druckes, den Körper abc in ebenso viele den Schichten des ersten ähnliche und ähnlich um den Schwerpunct und zur Axe gelegene Schichten eingetheilt, so lässt sich nachweisen, dass diese zugleich Schichten constanten Druckes sind. Denke man sich die beiden Körpermassen noch in gleich viele Molecüle eingetheilt, von denen dx dy dz und dξ dη dζ zwei ähnlich gelegene und den beiden Massen dem Volumen nach proportionale Molecüle dm und dm′ sind. Wenn ferner mit f und f′ die bezüglichen Abstände zweier correspondirender und gleicher Massenpuncte H und h von den gedachten Massenelementen und mit r und r′ ihre respectiven Abstände von den Drehungsaxen PP′ und pp′ bezeichnet werden, so sind die Kräfte, durch welche die Atome H und h von dm und dm′ angezogen werden, beziehlich proportional zu $\frac{dm}{f^2}$ und $\frac{dm'}{f'^2}$. Weil nun in diesen Quotienten die Zähler den dritten Potenzen, die Nenner den Quadraten zweier homologen Linien der beiden Körper proportional sind, so sind die sollicitirenden Kräfte zweien solchen Linien einfach proportional. Die Linien f und f′, in deren Richtungen die Kräfte wirken, sind auf gleiche Weise gegen die Oberflächen geneigt, in welchen H und h liegen. Daraus folgt dann, dass die Kräfte stets einander proportional sind und unter gleichen Winkeln gegen die bezüglichen Flächen geneigt sind. Auf ähnliche Weise werden die Centrifugalkräfte, da die

Rotationsgeschwindigkeit gleich ist, in beiden Körpern die Atome H und h von den Axen entfernen mit Kräften, die den respectiven Entfernungen r und r′ proportional sind und ebenfalls nach homologen Richtungen wirken. Folglich sind die Summen aller auf die Atome H und h wirkenden Kräfte stets proportional r und r′ und haben in beiden Körpern gleiche Richtungen gegen die Oberflächen, worin diese Puncte liegen. Da nun die gegen die homologe Fläche des Körpers ABC wirkende Resultante der Kräfte normal gegen sie gerichtet ist, muss sie es auch in dem Puncte h sein, und sich zu der ersteren verhalten, wie zwei homologe Linien der beiden Körper.

Seien K und k irgend welche zwei andere ähnlich gelegene Puncte derselben Flächen, δn und $\delta n'$ die Dicken der Schichten an diesen Stellen, Δn und $\Delta n'$ die Dicken derselben bei H und h und bezeichnen g und g′, G und G′ respective die Resultanten der auf die Atome K und k, H und h wirkenden Kräfte, so folgt aus dem Vorhergehenden

$$G : G' = g : g' = a : b'.$$

Nun ist aber auch

$$\Delta n : \Delta n' = \delta n : \delta n' = 1 : t^{2}$$

und wenn man die beiden Gleichungen mit einander multiplicirt

$$G\Delta n : G'\Delta n' = g\delta n : g'\delta n' \qquad (11)$$

Diese Quantitäten sind aber bekanntlich die Variationen des Druckes von einer Schicht zur andern, wenn man die Dichtigkeit ϱ der Einheit gleich setzt. Wenn man mit Δp die Variation des Druckes H von dieser bis zur nächsten Schicht bezeichnet, mit δp dieselbe in h, so ist nach der Voraussetzung die Variation des Druckes in H und K dieselbe, also

$$G\Delta n = G'\Delta n' = -\Delta p.$$

Mit Rücksicht auf (11) ist alsdann

$$g\delta n = g'\delta n' = -\delta p,$$

woraus denn unzweifelhaft hervorgeht, dass auch die Flächen der kleineren Masse dieselben schon früher besprochenen Eigenschaften besitzen, dass sie nämlich Schichten einschliessen, für welche die Variation des Druckes von einer Schicht zur andern für alle Puncte constant bleibt. Was von den einzelnen Schichten gilt, muss nun allgemein von allen gelten, also auch von der äussersten.

Aus allem diesem geht nun die unzweifelhafte Thatsache hervor, dass sich im Innern der im Gleichgewicht befindlichen Masse ABC ihr ähnliche und ähnlich um die Drehungsaxe gelegene Figuren wie a′b′c′ beschreiben lassen, welche absolut und für sich im Gleichgewicht sind. Diese sind aber nur dann von der Anziehung der äussern Schicht unabhängig, wenn diejenigen Puncte von a′b′c′, für welche die drei Partialkräfte seitens der Anziehung der Masse a′b′c′ und der Centrifugalkräfte verschwinden, mit denen zusammenfallen, für welche die drei Partialkräfte X, Y, Z seitens der ganzen Masse ABC verschwinden. Wir wollen der Kürze wegen später diese Puncte mit dem Namen „adynamische Puncte" bezeichnen. Diese Puncte liegen bei beiden ähnlich zum Schwerpunct; wenn man daher a′b′c′ auf die oben angedeutete Art um O beschreibt, so wird diese Masse separatim durch die Centrifugalkräfte und die eigene Massenattraction im Gleichgewicht erhalten. Die ganze Flüssigkeitsmasse ABC würde aber nicht im Gleichgewicht sein, wenn die Theilchen innerhalb a′b′c′ nicht auch im Gleichgewicht wären mit Rücksicht auf die übrigen Kräfte, also frei von der Anziehung der darüber liegenden Schicht. Es ist mithin a′b′c′ eine Niveaufläche, da sie zur Resultante aller Kräfte, die auf ihre Puncte wirken, senkrecht steht, da der Druck durch alle darüber liegenden unendlich dünnen und unter sich ähnlichen Schichten constant nach unten variirt, folglich der Gesammtdruck derselben auf alle Theile der Oberfläche a′b′c′ derselbe ist. Hieran knüpfen sich nun einige Folgerungen an: Die adynamischen Puncte solcher Figuren oder Flächen, welche um

den Schwerpunct ähnlich gelegen sind, sind keine vereinzelte, sondern nur ein einziger oder bilden eine gerade Linie oder eine Ebene, mit denen der Schwerpunct zusammenfällt. Auf andere Weise können die adynamischen Linien oder Ebenen (wenn solche existiren) der innern Masse mit denen der ganzen nicht coincidiren, da sie bei beiden ähnlich zum Schwerpunct liegen, zwei ähnliche Curven und gekrümmte Flächen sich aber nur in einem Puncte berühren können. Fielen die genannten Puncte der innern Masse nicht mit denen der äussern zusammen, so lieferte dieser Umstand Puncte, welche einestheils frei wären von der Wirkung der kleineren Masse a'b'c', anderntheils aber auch nach dem Früheren frei von der Anziehung der äussern Schicht, mithin frei von der Einwirkung der ganzen Masse in Vereinigung mit den Centrifugalkräften, welche dennoch nicht mit den angenommenen adynamischen Linien der ganzen Masse zusammenfielen. Dies kann aber immer bei einem einzigen Puncte, einer einzigen Geraden oder Ebene geschehen.

Nun ist klar, dass alle Puncte einer adynamischen Linie oder Fläche unter demselben gemeinschaftlichen Drucke stehen. Denn es wird das Gleichgewicht in keiner Weise gestört, wenn wir sie uns durch eine feste Wand von dem übrigen Theil der Masse abgetrennt denken; da nun die Massenelemente innerhalb der Wand von keinerlei Kräften gegeneinander getrieben werden, als nur durch den hydrostatischen Druck, so ist der oben ausgesprochene Satz eine unmittelbare Folge des statthabenden Gleichgewichts. Die adynamischen Linien oder Flächen sind deshalb Niveauflächen und müssen dem Frühern gemäss den übrigen ähnlich und ähnlich mit ihnen um den Schwerpunct gelegen sein, also auch mit der Oberfläche der ganzen Flüssigkeitsmasse. Daraus folgt, dass Körper von endlicher Form und Grösse keine adynamischen Linien und Flächen, sondern nur einen adynamischen Punct haben, der mit dem Schwerpunct identisch ist. Giebt es aber unendliche Körper dem Volumen nach, welche adynamische

Linien und Flächen haben, so können dieses hier nur unendliche Cylinder und unendliche Discen sein, von denen die Form des Umfangs noch unbestimmt bleibt. Die Drehungsgeschwindigkeit muss alsdann aber auch für beide gleich Null sein, ausgenommen wenn die Axe des unendlichen Cylinders mit der Drehungsaxe zusammenfällt. Da jede Niveauschicht auf die unter ihr liegende drückt, so wächst der Druck mit der Annäherung an die adynamischen Puncte und muss hier sein Maximum erreichen. Sind die Dimensionen des Körpers endlich, so reduciren sich die adynamischen Puncte auf den Schwerpunct, in welchem der Druck demgemäss ein Maximum ist.

Die vorhergehenden Betrachtungen haben uns nun zu zwei Hauptbedingungen geführt, welche das Gleichgewicht der Masse ABC sichern:

erstens, dass die Resultante aller auf die äusserste Oberfläche wirkenden Kräfte zu dieser senkrecht sein muss; folglich

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

zweitens, dass die innern Niveauflächen, welche senkrecht gerichtet sind gegen die Resultante aller auf ihre Puncte wirkenden Kräfte, der Oberfläche ähnlich und ähnlich um das Barycentrum gelegen sein müssen, also

$$r : r' = a : a'$$

oder für zwei unendlich nahe Flächen

$$\delta r : r = \delta a : a \qquad (12)$$

wo a und a' die rad. vect. der beiden Pole, r und r' die rad. vect. zweier anderer ähnlich gelegenen Puncte der Oberfläche und der unendlich nahen Niveaufläche, δa und δr ihre Unterschiede bedeuten.

Durch diesen Satz werden nun von allen denjenigen geschlossenen Körpern, welche den Schwerpunct in ihrer Masse oder innerhalb ihrer Oberfläche haben, diejenigen vom Gleich-

gewichte ausgeschieden, welche sich nicht in einander unendlich nahe und ähnlich um den Schwerpunct liegende Schichten theilen lassen. Folgende Betrachtung möge zur Erläuterung dieses Schlusses dienen.

Angenommen es sei PQR (Fig. 6) eine im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeitsmasse, O ihr Schwerpunct, PP die durch O gelegte Drehungsaxe. Wird um den Schwerpunct O eine der Masse ähnliche und um O ähnlich gelegene Figur pqr beschrieben, so dass sich beide in Q berühren und diesen Punct gemeinschaftlich haben, so muss diese Figur nach dem Früheren eine Niveaufläche sein. Da dies indess nur dann der Fall sein kann, wenn alle Puncte der Fläche pqr einem gleichen Drucke unterliegen, so muss der Druck in p so gross sein wie in q oder Q. In Q ist der Druck aber Null, in P ebenfalls, in O aber ein Maximum und da alle Puncte innerhalb des Kanals den Kräften X, Y, Z unterworfen sind, so muss p einen messbaren Druck erleiden. Es wäre also in q der Druck Null, in p grösser als Null, mithin kann pqr nicht im Gleichgewichte sein.

Anders verhält sich die Sache, wenn das System aus getrennten Massen besteht wie z. B. Planet und Centralkörper, wobei dieser den Schwerpunct des ganzen Systems innerhalb seiner Oberfläche haben kann. Hier kann die erforderliche Zerlegung in ähnliche Körper wol für jeden einzelnen stattfinden, aber nicht in relative ähnliche Systeme, die auch absolut und für sich im Gleichgewicht sein würden. Indess gehört dieser Fall eigentlich nicht hieher. Während bei einem freien flüssigen System von einer einzigen Oberfläche das Gleichgewicht einen überall gegen dieselbe gleichwirkenden Druck erfordert, ist hier Gleichgewicht möglich, da die getrennten Massen für sich verschiedenen äussern Drucken ausgesetzt werden können, ohne dass das ganze Gleichgewicht gestört wird. Systeme von getrennten flüssigen Massen sind einer besondern Untersuchung zu unterwerfen, und zwar so dass man für jeden der Körper ausser der Einwirkung der innern Kräfte

und der Centrifugalkraft auch noch die Einwirkung äusserer von dem Centralkörper herrührender Kräfte mit in Betracht zieht.

Um nun noch die beiden Arten von geschlossenen Flächen zu characterisiren, bei denen der Schwerpunct ausserhalb oder innerhalb liegt, und von denen die letzteren in zwei Unterabtheilungen zerfallen, wovon die eine im Gleichgewicht sein kann, die andere gar nicht, so wollen wir die Gleichung

$$r = aF(\xi, \eta, \zeta)$$

als allgemeine Polargleichung der Flächen betrachten, worin r den rad. vect., a eine Constante, ξ, η, ζ die drei Winkel bedeuten, welche r mit den drei Coordinatenaxen bildet, wobei diese durch den Schwerpunct gelegt sind. Die erste Klasse von Figuren sind durch Flächen gebildet, bei denen für einen und denselben Werth der drei Winkel r mehrere Werthe hat und zwar jedesmal eine gerade Anzahl. Ihr Gleichgewicht ist nicht unmöglich. Die zweite Klasse von Körpern ist von Flächen begrenzt, bei denen für denselben Werth der drei Winkel r ebenfalls mehrere Werthe aber jedesmal eine ungerade Anzahl hat. Soll ihr Gleichgewicht möglich sein, so darf r für alle möglichen Werthe von ξ, η, ζ nur jedesmal einen einzigen erhalten; hiervon sind jedoch diejenigen körperlichen Figuren auszuschliessen, welche aus völlig getrennten Stücken bestehen. Von Letzteren kann man wiederum der Erfahrung gemäss sagen: ihr Gleichgewicht ist nicht unmöglich. Die Figuren, welche wir unserer besonderen Betrachtung unterziehen, besitzen die Eigenschaft, dass wenn a in der obigen Gleichung von a bis Null variirt, dieselbe für alle Werthe der drei Winkel Werthe von r liefert, denen jedesmal ein reelles Massenelement entspricht. Für eine kleinere Fläche hat man

$$r' = a'F(\xi, \eta, \zeta)$$

unter der Bedingung $a > a' > 0$. Mit andern Worten: die Figuren müssen sich in lauter ähnliche zerlegen lassen, so dass für denselben Werth der drei Winkel die Beziehung gilt

$$r : r' = a : a'$$

oder

$$\frac{r - r'}{r} = \frac{a - a'}{a}$$

welche letztere für unendlich nahe Flächen übergeht in die schon oben unter (12) aufgestellte

$$\partial r : r = \partial a : a.$$

§ 3.

Ueber die endliche Gleichung der Oberfläche einer homogenen Flüssigkeit.

Wir kehren jetzt zu unsrer Aufgabe zurück, die Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit zu bestimmen und beginnen von der Gleichung (8). Sie liefert in Verbindung mit (12)

$$Rr = Aa \qquad (13)$$

wo A und a nach der frühern Annahme ihrer Bedeutung constant sind und Rr sich auf irgend einen Punct einer und derselben Niveaufläche bezieht. Diese Gleichung sagt aus, dass die Producte aus den rad. vect. und den nach dieser Richtung geschätzten Componenten der Schwerkräfte einen constanten Werth haben.

Durch Einführung der Gleichung

$$R = X \cos \varepsilon + Y \cos \zeta + Z \cos \vartheta$$

gelangen wir zu einer neuen Relation zwischen den Partialkräften und den Coordinaten, nämlich

$$Xx + Yy + Zz = Aa \qquad (14)$$

welche für jeden Punct einer und derselben Niveaufläche gilt, also als die endliche Gleichung der Oberfläche anzusehen ist. Sie liefert in Verbindung mit ihrer Differenzialgleichung

$$Ydx + Ydy + Zdz = 0$$

die exacte Gleichung der Niveauflächen.

Um die Massenanziehungen von der Centrifugalkraft zu sondern, führen wir statt der Componenten Y und Z die andern $Y + iy$ und $Z + iz$ ein, wodurch die Gleichung (14) sich verwandelt in

$$Xx + (Y + iy)y + (Z + iz)z = Aa \qquad (15)$$

und ihre Differenzialgleichung in

$$Xdx + (Y + iy)dy + (Z + iz)dz = 0.$$

Differenziren wir die Gleichung (15), so gibt sie

$$Xdx + xdX + Ydy + ydY + Zdz + zdZ + 2i\,(ydy + zdz) = 0$$

und liefert in Verbindung mit der andern Differenzialgleichung die neue

$$xdX + ydY + zdZ + i\,(ydy + zdz) = 0$$

und durch Subtraction

$$(xdX - Xdx) + (ydY - Ydy) + (zdZ - Zdz) = 0.$$

Hieraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} xdX - Xdx &= 0 \\ ydY - Ydy &= 0 \\ zdZ - Zdz &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

und durch Integration derselben wird

$$X = cx;\; Y = c'y;\; Z = c''z.$$

Die exacte Gleichung der Niveauflächen ist also gemäss (15)

$$cx^2 + (c' + i)y^2 + (c'' + i)z^2 = Aa \qquad (17)$$

als singuläre Form der Oberfläche, während die Integration der Gleichung (12) die allgemeine Form liefert, welche auch den innern Niveauflächen angehört, nämlich

$$c x^2 + (c' + i) y^2 + (c'' + i) z^2 = Aa - 2\mu \quad (15^*)$$

Wir wollen diese Untersuchung noch auf eine andere Weise führen. Die Differenzialgleichung der Oberfläche hat allgemein die Form

$$mXdx + m(Y + iy)dy + m(Z + iz)dz = 0$$

und die Gleichung (15) stellt eine Function der 3 Variabeln x, y, z dar, also

$$Aa = F(x, y, z).$$

Demnächst ist nun

$$mX = \left(\frac{dF}{dx}\right); \quad m(Y + iy) = \left(\frac{dF}{dy}\right); \quad m(Z + iz) = \left(\frac{dF}{dz}\right);$$

Bezeichnen wir die Partialdifferenzialquotienten respective mit Π, Φ, Ψ so ergeben die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe

$$F(x + dx, y + dy, z + dz) = F + \frac{dF}{1} + \frac{d^2F}{1.2} + \frac{d^3F}{1.2.3} + \dots$$

wo dF, d^2F, u. s. w. die totalen Differenziale der Function F bezeichnen. Setzt man alsdann für x, y, z Null und für dx, dy, dz die Grössen x, y, z, so erhält man

---

*) Legendre und auch Laplace gelangten durch ihre Untersuchungen beide zu dem Schlusse, dass das elliptische Sphäroid ausschliesslich die Gleichgewichtsfigur eines homogenen Planeten sei. Gegen ihre mathematische Herleitung ist freilich nichts einzuwenden. Indess gründet sich dieselbe bei näherer Betrachtung auf der Annahme eines willkürlich und ohne Rücksicht auf das Gleichgewicht angenommenen Ausdrucks für den radius vector des Sphäroids. Ein solches Verfahren kann nie als eine vollständige und apriorische Lösung des Problems anerkannt werden, wenn nicht erst bewiesen wird, dass alle mögliche Gleichgewichtsfiguren nothwendig in dem Ausdruck des rad. vect. der Oberfläche enthalten sind. (Laplace, Méc. cél. livre III prop. 24 u. 25 und Legendre in seinem Mémoire von 1784.)

$$F(x, y, z) = F(0) + \Pi(0)\,x + \lambda x^2 + \sigma xy + \tau xz + \ldots.$$
$$+ \Phi(0)\,y + \mu y^2 + \omega yz$$
$$+ \Psi(0)\,z + \nu z^2$$

mithin allgemein

$$F(x, y, z) = A x^\alpha y^\beta z^\gamma + B x^\varepsilon y^\zeta z^\vartheta + \ldots$$

Unter den Gliedern dieser Reihe müssen sich auch nach (15) die beiden exacten iy^2 und iz^2 befinden, mithin wird

$$Aa = F(x, y, z)$$
$$= A x^\alpha y^\beta z^\gamma + B x^\varepsilon y^\zeta z^\vartheta + \ldots + i(y^2 + z^2).$$

Differenzirt man diese Gleichung partiell, so ergibt sich

$$mX = \left(\frac{dF}{dx}\right) = \alpha A x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma + \varepsilon B x^{\varepsilon-1} y^\zeta z^\vartheta + \ldots.$$

$$m(Y + iy) = \left(\frac{dF}{dy}\right) = \beta A x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma + \zeta B x^\varepsilon y^{\zeta-1} z^\vartheta + \ldots + 2iy$$

$$m(Z + iz) = \left(\frac{dF}{dz}\right) = \gamma A x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1} + \vartheta B x^\varepsilon y^\zeta z^{\vartheta-1} + \ldots + 2iz$$

Addirt man diese drei Gleichungen, nachdem man die erste mit x, die zweite mit y, die dritte mit z multiplicirt hat, so erhält man

$$mAa = (\alpha + \beta + \gamma) A x^\alpha y^\beta z^\gamma + (\varepsilon + \zeta + \vartheta) B x^\varepsilon y^\zeta z^\vartheta + \ldots + 2i(y^2 + z^2)$$

Aus der Vergleichung dieser mit der obigen geht denn endlich hervor

$$m = \alpha + \beta + \gamma = \varepsilon + \zeta + \vartheta = \ldots = 2.$$

Die gedachte Function ist also homogen und gehen wir zurück auf die für sie entwickelte Reihe, so muss sein

$$Aa = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \sigma xy + \tau xy + \omega yz \qquad (19)$$

worin die allein mögliche Figur im allgemeinsten Falle als dreiaxiges Ellipsoid erkennbar wird.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass die Coefficienten σ, τ, ω der

Null gleich sein müssen, d. h. dass das Ellipsoid sich um eine seiner Hauptaxen drehen muss. Die gefundene Gleichung ist die Mittelpunktsgleichung. Angenommen, es drehe sich das Ellipsoid um einen andern Durchmesser MN, PP' sei die kürzeste, pp' die längste Axe. Da die Massenanziehung einzig und allein in den drei Axen nach der Richtung dieser hinwirkt, so würden die Schwungkräfte des Punctes P, nämlich iy und iz jede in zwei andere zerlegt werden können, in eine nach der Richtung PP' und in die darauf senkrechte. Wäre die letztere Componente nicht der Null gleich, so wäre dp nicht in allen Puncten der Oberfläche gleich Null, also die Masse auch nicht im Gleichgewichte. Deswegen muss nun die Drehungsaxe mit einer der Hauptaxen zusammenfallen; alsdann kann man annehmen, dass die beiden andern Coordinaten den übrigen Axen der geometrischen Figur parallel seien.

Die Oberflächengestalt gewinnt durch diese Modification eine Gleichung von der Form

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = Aa \qquad (20)$$

Welche der drei Axen die Drehungsaxe sein müsse, ob die kürzeste oder eine der beiden anderen, bleibt noch fraglich, so lange nichts über die Richtung der Resultante der gesammten Anziehung bekannt ist. Indessen lässt sich schon im Voraus festsetzen, dass das Gleichgewicht der freien Flüssigkeit nur dann möglich ist, wenn die Richtungen der Massenattraction und die der Centrifugalkraft auf entgegengesetzten Seiten der Normale liegen. Demgemäss kann unter den Rotationsellipsoiden nicht das oblonge, sondern nur das abgeplattete eine permanente Gleichgewichtsfigur bilden, wenn nämlich die ungleiche Axe als Drehungsaxe angenommen wird. Es ist von Claussen a. a. O. der Beweis geführt worden, dass das flüssige dreiaxige Ellipsoid mit permanentem Gleichgewichte sich nur um die kürzeste Axe drehen könne. Eine Ausnahme jedoch macht hiervon der unendliche Cy-

linder: er kann um seine längste Axe sich drehend bei zweierlei Axenverhältnissen im Gleichgewichte sein; und obgleich dies Verhalten nur analytischen Werth hat, scheint es doch in der Theorie unbeachtet geblieben zu sein. (vergl. §. 6.)

Bezeichnen wir mit A, B, C respective die Grösse der Schwerkräfte an den drei Polen des Planeten, so geht aus der früheren ([illegible]) die neue Gleichung hervor

$$Aa = Bb = Cc \qquad (21)$$

worin a, b, c die drei Halbaxen des Ellipsoides bezeichnen.

Die zweite Methode, die exacte Gleichung der Oberfläche herzuleiten, führt nicht zum Ziel, wenn die Flüssigkeit in Ruhe verharrt, also i der Null gleich ist, weil der Grad der Gleichung unbestimmt bleibt. Aber sie ist nicht ohne Werth, sofern sie zeigt, dass die Function F homogen ist. Kloeden leitet in seinen: „Grundlinien zu einer neuen Theorie der Erdgestaltung“ pag. 8 durch ein einfaches Räsonnement ab, dass das Flüssige sich selbst überlassen einen Körper minimae areae, also die Kugel zu bilden suche. Indessen lehrt die Theorie, dass auch zwei Körper maximae areae, nämlich der unbegränzte Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt und der unendliche Discus im Gleichgewichte sein können, wenn auch labil. Es soll hier nun, und zwar auf einem andern Wege, wenn sich auch gegen die Allgemeinheit der ersteren Methode Zweifel erheben sollten, gezeigt werden, dass das Flüssige im Ruhezustande die Figur eines Ellipsoides anzunehmen sich bestrebt. Die Analysis wird dann lehren, dass unter allen Ellipsoiden nur das gleichaxige oder die Kugel, der unendliche Discus und der unendliche Cylinder mit kreisförmiger oder rectilinearer Basis dem Gleichgewichte genügen.

Oben ist bewiesen worden, dass die Componenten der Anziehung zweier auf zwei verschiedenen, unendlich nahen oder endlich entfernten Niveauflächen ähnlich gelegenen Atome zweien homologen Linien proportional sind, also

$$\left.\begin{array}{l} X : X' = x : x' \\ Y : Y' = y : y' \\ Z : Z' = z : z' \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Angenommen es sei

$$\alpha + \beta + \gamma = \varepsilon + \zeta + \vartheta = \ldots\ldots = n$$

also die Function $F(x, y, z)$ vom n^{ten} Grade, so wäre

$$\begin{aligned} X = {} & px^{n-1} + qx^{n-2}(q'y + q''z) \\ & + rx^{n-3}(r'y^2 + r''yz + r'''z^2) \\ & + \ldots\ldots \\ & + sy^{n-1} + s'y^{n-2}z + \ldots\ldots + \varsigma z^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = {} & ty^{n-1} + uy^{n-2}(u'x + u''z) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z = {} & vz^{n-1} + wz^{n-2}(w'x + w''y) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Da nun für $y = z = 0$, X in A und x in a übergeht, so ist

$$A = pa^{n-1}.$$

Weil ferner in der Oberflächengleichung (15) nur die Constante A von einer Niveaufläche zur andern variirt, so ist

$$\begin{aligned} X' = {} & px'^{n-1} + qx'^{n-2}(q'y' + q''z') \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

und beim Uebergange von y' und z' in Null

$$A' = pa'^{n-1}$$

Aus (22) folgt nun $A : A' = a : a'$, und wenn man die Gleichungen für A und A' durcheinander dividirt, erhält man

$$1 = \frac{pa^{n-2}}{pa'^{n-2}} \qquad (23)$$

was nur unter der Bedingung möglich ist, dass $n = 2$ sei.

Oder so: man dividire die Gleichungen für X und X′ durch einander und setze X : X′ = x : x′ nach (22), so erhält man

$$1 = \frac{px^{n-2} + qq'yx^{n-3} + rr'y^2x^{n-4} + \dots}{px'^{n-2} + qq'y'x'^{n-3} + rr'y'^2x'^{n-4} + \dots}$$

Bedient man sich alsdann der Substitution $y' : x' = y : x$, welches die Aehnlichkeit der Niveauflächen gestattet, so ergibt sich

$$(p + qq' \frac{y}{x} + rr' \frac{y^2}{x^2} + \dots)(x^{n-2} - x'^{n-2}) = 0$$

Der Coefficient zur Linken hat den Werth X dividirt durch x^{n-1}, woraus hervorgeht

$$x^{n-2} - x'^{n-2} = 0 \qquad (24)$$

Dies ist ebenfalls nur unter der Bedingung möglich, dass $n = 2$ sei.

Hieraus geht denn endlich hervor, dass für das homogen Flüssige, möge es in Ruhe oder in einer gleichförmigen Drehung begriffen sein, das dreiaxige Ellipsoid die allein mögliche Gleichgewichtsfigur sei; wenn, müssen wir noch hinzufügen, es überhaupt bei einer freien Bewegung im Gleichgewichte sein kann. Denn es bleibt noch die Aufgabe der analytischen Mechanik zu untersuchen, ob das sogenannte Potenzial der Anziehung eines Ellipsoides auf einen Punct in seinem Innern die erforderlichen Eigenschaften besitze, dass nämlich die drei Componenten der Massenattraction den Coordinaten des Punctes respective proportional seien, da ja das Gleichgewicht verlangt

$$X = \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}\right) = px$$

u. s. w.

Glücklicherweise hat sich dieses nun durch die Rechnung bestätigt, weil bekanntlich ist

$$X = -\frac{3M f x}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1+\lambda^2 u^2)(1+\lambda'^2 u^2)}}$$

u. s. w.

Fände jene Proportionalität nicht Statt, so würde es für freie rotirende Flüssigkeitsmassen keine permanente Gleichgewichtsfiguren geben und dieselben vielleicht im ewigen Flusse sich bewegen, wenn es nicht etwa Figuren der andern Art wären, bei welchen der Schwerpunct ausserhalb ihrer Oberfläche liegt, deren allgemeine Untersuchung aber nicht im Bereich dieser Abhandlung liegt.

Für eine im Gleichgewicht befindliche ruhende oder rotirende Flüssigkeit finden nun die schon früher aufgestellten Relationen statt:

$$X = cx;\quad Y = c'y;\quad Z = c''z \tag{25}$$

also auch

$$xdX - Xdx = 0$$

u. s. w.

und da aus (23) die Proportion

$$\frac{X - X'}{X} = \frac{x - x'}{x}$$

oder für unendlich nahe Puncte folgt

$$x\delta X = X\delta x$$

so ist $\quad c = X : x = dX : dx = \delta X : \delta x.$

Differenziren wir die Gleichung

$$R = \frac{Aa}{r}$$

so ist

$$\frac{dR}{dr} = -\frac{Aa}{r^2}$$

und $\quad rdR + Rdr = 0 \quad (26)$

Durch Variation gelangen wir zu dem Verhältnisse der Veränderung von R zu der von r, wenn wir von irgend einem

Puncte einer Oberfläche zu dem benachbarten Puncte einer unendlich nahe liegenden Niveaufläche übergehen; es ist enthalten in der Gleichung

$$r dR + R dr = 0 \qquad (27)$$

Zunächst ist nun für fernere Betrachtungen eine genauere Bestimmung der Constanten der Gleichung (20) erforderlich.

Differenzirt man dieselbe zweimal partiell, so erhält man

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2f}{dz^2}\right) = \text{const.} \qquad (28)$$

wenn man setzt

$$2f = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2.$$

Die Gleichung (14) liefert

$$\left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y + \left(\frac{df}{dz}\right)z = Aa \qquad (29)$$

und die Bedingung des Senkrechtstehens der Schwerkraft auf dem Flächenelemente der Oberfläche liegt in der Formel

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz = 0 \qquad (30)$$

Als allgemeinste Oberflächengleichung der permanenten Gleichgewichtsfiguren, welche homogen sind und ihren Massenmittelpunct einschliessen, haben wir erkannt diejenige von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

In Verbindung derselben mit der aus (20) abzuleitenden identischen Gleichung

$$\frac{\lambda x^2}{Aa} + \frac{\mu y^2}{Aa} + \frac{\nu z^2}{Aa} = 1$$

erhalten wir folgende Werthe für die drei unbestimmten Coefficienten

$$\lambda = \frac{Aa}{a^2};\ \mu = \frac{Aa}{b^2};\ \nu = \frac{Aa}{c^2}$$

oder, durch Substitution von (21)

$$\lambda = \frac{A}{a};\ \mu = \frac{B}{b};\ \nu = \frac{C}{c} \quad (31)$$

Da wir die x-Axe zur Drehungsaxe der Masse angenommen haben, so muss nun, wenn wir mit A, B, C die Accelerationen an den drei Polen des Ellipsoids, die absoluten Massenattractionen aber an den beiden Polen des Aequators, zum Unterschiede von B und C mit B′ und C′ bezeichnen, die Gleichung

$$\frac{Ax^2}{a} + \frac{B'y^2}{b} + \frac{C'z^2}{c} + i(y^2 + z^2) = Aa$$

stattfinden, und wenn man aus der Gleichung des dreiaxigen Ellipsoides für x seinen Werth substituirt

$$y^2\left(\frac{B'b - Aa}{b^2} + i\right) + z^2\left(\frac{C'c - Aa}{c^2} + i\right) = 0$$

Aus (21) und auch aus dem Grunde, weil z von y unabhängig ist, folgt, dass jeder der beiden Coeffizienten gleich Null sein müsse.

Es lassen sich nun auch leicht die Werthe der Componenten der Anziehung angeben. Weil nämlich

$$X = \lambda x;\ (Y + iy) = \mu y;\ (Z + iz) = \nu z$$

ist, ist nun genauer

$$X = \frac{A}{a}x;\ (Y + iy) = \frac{B}{b}y;\ (Z + iz) = \frac{C}{c}z \quad (32)$$

Durch Substitution dieser Werthe in die beiden Differenzialgleichungen

$$Xdx + (Y + iy)dy + (Z + iz)dz = 0$$
$$xdX + yd(Y + iy) + zd(Z + iz) = 0$$

resultirt jedesmal die exacte

$$\frac{A}{a}xdx + \frac{B}{b}ydy + \frac{C}{c}zdz = 0$$

Durch Integration dieser Gleichung kommen wir natürlich wiederum zu der Oberflächengleichung

$$\frac{Ax^2}{a} + \frac{By^2}{b} + \frac{Cz^2}{c} = Aa = Bb = Cc \quad (33)$$

Wir wollen zunächst die Grösse und Richtung der Kräfte untersuchen, die in irgend welchen Puncten der Oberfläche thätig sind; was dann für diese gilt, wird auch für die innern Niveauflächen gelten.

§ 4.

Ueber die Beziehungen, welche zwischen der Schwerkraft P und einzelnen besondern geometrischen Verhältnissen des Ellipsoïdes stattfinden.

Eine äusserst merkwürdige Beziehung findet zwischen der Schwerkraft irgend eines Punctes der Oberfläche und seinen drei Normalen statt. Combiniren wir die beiden Gleichungen (10) und (32), so tritt dieselbe hervor in der folgenden

$$P = \frac{A}{a}n_{yz} = \frac{B}{b}n_{xz} = \frac{C}{c}n_{xy} \quad (34)$$

d. h. die Schwerkraft ist den drei zugehörigen Normalen des betrachteten Oberflächenelements proportional.

Es wird von Interesse sein, die Schwerkraft durch eine Coordinatengleichung auszudrücken. Da stets

$$P\partial n = X\partial x + Y\partial y + Z\partial z$$

ist, und wegen der Aehnlichkeit der Niveauflächen die Beziehungen

$$dx : dn = x : n_{yz}$$
$$dy : dn = y : n_{xz}$$
$$dz : dn = z : n_{xy}$$

stattfinden, so resultirt hieraus die fernere

$$P = \frac{Xx}{n_{yz}} + \frac{(Y + iy)y}{n_{xz}} + \frac{(Z + iz)z}{n_{xy}}$$

oder die exacte Gleichung

$$P = \frac{Ax^2}{an_{yz}} + \frac{By^2}{bn_{xz}} + \frac{Cz^2}{cn_{xy}} \qquad (35)$$

Hieraus ergibt sich eine andere einfache Beziehung zwischen P und A, nämlich

$$\frac{P}{A} = \frac{x^2 a}{a^2 n_{yz}} + \frac{y^2 a}{b^2 n_{xz}} + \frac{z^2 a}{c^2 n_{xy}} \qquad (36)$$

Weil ferner die Normalen eines und desselben Oberflächenelementes eines Ellipsoids sich verhalten wie die Quadrate der drei Halbaxen, folglich

$$n_{yz} : n_{xz} : n_{xy} = a^2 : b^2 : c^2$$

so hat man auf noch andere Weise

$$\frac{Pn_{yz}}{Aa} = \frac{a^2x^2}{a^4} + \frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{a^2z^2}{c^4} \qquad (37)$$

Eliminirt man hieraus n_{yz} vermittelst der Gleichung (34), so erhält man einen Ausdruck für die Schwerkraft in Coordinatenlängen, nämlich

$$P = A \sqrt{\frac{a^2x^2}{a^4} + \frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{a^2z^2}{c^4}} \qquad (38)$$

oder nach Einführung einer frühern Bezeichnungsweise

$$P = Aa \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$$

Auf eine ziemlich einfache Weise kann man auch noch die Schwerkraft ausdrücken durch:

$$P = A\frac{x}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} \quad (39)$$

Verwandelt man die rechtwinkligen in Polarcoordinaten desselben Anfangspunctes, so ist

$$x = r \cos\varepsilon;\; y = r \cos\eta;\; z = r \cos\zeta,$$

und führt man sie in (38) ein, indem man zugleich beachtet, dass

$$r^2\left(\frac{\cos\varepsilon^2}{a^2} + \frac{\cos\eta^2}{b^2} + \frac{\cos\zeta^2}{c^2}\right) = 1$$

so entspringt daraus

$$P = Aa\frac{\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2}{a^4} + \frac{\cos\eta^2}{b^4} + \frac{\cos\zeta^2}{c^4}}}{\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2}{a^2} + \frac{\cos\eta^2}{b^2} + \frac{\cos\zeta^2}{c^2}}} \quad (40)$$

woraus sich durch die bekannte Relation zwischen jenen drei Winkeln

$$\cos\varepsilon^2 + \cos\eta^2 + \cos\zeta^2 = 1$$

die eine oder andere der Winkelfunctionen eliminiren lässt. Wenn wir jetzt in (38) folgende einfachere auch sonst gebräuchliche Bezeichnungsweise einführen

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} = \lambda^2;\quad \frac{c^2-a^2}{a^2} = \lambda'^2$$

so liefert sie einen sehr brauchbaren Ausdruck für die Schwerkraft, nämlich

$$P = A\sqrt{1 - \frac{a^2y^2}{b^4}\lambda^2 - \frac{a^2z^2}{c^4}\lambda'^2}$$

oder auch

$$P = A\sqrt{1 - \frac{y^2\lambda^2}{b^2(1+\lambda^2)} - \frac{z^2\lambda'^2}{c^2(1+\lambda'^2)}} \qquad (41)$$

nachdem zuvor x eliminirt worden ist. Da a die kleinste Halbaxe ist, so ist hienach stets $P < A$; auch ist P stets reell, für alle Werthe von a, b, c; wogegen die Masse nicht unter jeglichen Verhältnissen im Gleichgewichte sein wird. Das Verhältniss der drei Axen ist abhängig von der Dichte und Rotationsgeschwindigkeit der Masse, und von demselben weiter unten die Rede. Der Winkel, den die Normale mit dem rad. vect. bildet, wird sich ebenfalls als eine Function irgend welcher Coordinaten des Punctes darstellen lassen. Wir fanden oben

$$P\partial n = A\partial a = \frac{aA\partial r}{r}$$

wodurch sich der gesuchte Winkel unter diese Form bringen lässt

$$\widehat{nr} = \text{arc. cos}\,\frac{\partial n}{\partial r} = \text{arc. cos}\,\frac{aA}{rP}$$

Man könnte auch insofern

$$\frac{aA}{rP} = \frac{\frac{\cos\varepsilon^2}{a^2} + \frac{\cos\eta^2}{b^2} + \frac{\cos\zeta^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2}{a^4} + \frac{\cos\eta^2}{b^4} + \frac{\cos\zeta^2}{c^4}}}$$

nach (40) gilt, dies substituiren; einfacher sind die gleichfalls gültigen Formen

$$\widehat{nr} = \text{arc. cos}\,\frac{a^2}{rn_x} = \text{arc. cos}\,\frac{b^2}{rn_y} = \text{arc. cos}\,\frac{c^2}{rn_z} \qquad (42)$$

Es ist mithin der Cosinus der Ablenkung der Schwerkraft vom rad. vect. umgekehrt proportional dem Producte aus dem radius und einer der drei Normalen. Da bekanntlich die Krümmungshalbmesser sich wie die dritten Potenzen der Normallinien verhalten, so findet ebenfalls zwischen der Schwere und dem Halb-

messer der Krümmung der Oberfläche ein äusserst einfaches Verhältniss statt.

Sei ferner F irgend welcher Punct eines Meridians des Planeten, ms (Fig. 5) das Flächenelement einer unendlich nahen Niveaufläche, MS eine Ebene die mit diesem Flächenelement durch den Mittelpunct O parallel gelegt ist, so wird die Normale diese in einem Puncte Q schneiden. Die Länge FQ sei n_e; alsdann wird die einfache Beziehung stattfinden

$$\partial n : \partial r = n_e : r$$

Wenn nun P und R ihre frühere Bedeutung behalten, so ist, weil

$$P \partial n = R \partial r$$

auch noch

$$P = \frac{R\,r}{n_e} = \frac{A\,a}{n_e} \tag{43}$$

Die Abschnitte der verlängerten Coordinaten und des Krümmungshalbmessers, welche durch eine durch das Centrum parallel mit dem Oberflächenelement gelegte Ebene erzeugt werden und welche mit x_e, y_e, z_e, n_e bezeichnet werden mögen, haben, wie klar ist, folgende Beziehungen zu den Componenten

$$x_e : n_e = P : X$$

$$y_e : n_e = P : Y$$

$$z_e : n_e = P : Z.$$

Durch Substitution von (32) (39) und (43) erhält man nun

$$n_e = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}$$

$$x_e = \frac{a^2}{x},\; y_e = x \left(\frac{dx}{dy}\right),\; z_e = x \left(\frac{dx}{dz}\right)$$

$$y_e = \frac{b^2}{y} = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - z\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

$$z_e = \frac{c^2}{z} = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Beleuchten wir die in irgend einem ellipsoidischen Schnitte wirkenden und nach derselben Richtung geschätzten Componenten ein wenig näher. Wir gehen dabei aus von der Gleichung

$$Xx + (Y + iy)y + (Z + iz)z = Aa$$

Denken wir uns einen Schnitt parallel mit einer der Hauptebenen durch den Planeten gelegt z. B. mit der yz Ebene, alsdann ist x constant gleich a′ und

$$\frac{By^2}{b} + \frac{Cz^2}{c} = Aa\left(1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) \qquad (44)$$

Untersuchen wir jetzt den Werth der parallel der Ebene des Aequators geschätzten Kraft P′ in irgend einem Puncte dieses Schnitts, sie ist

$$\sqrt{(Y + iy)^2 + (Z + iz)^2}$$

Wenn wir noch die Halbaxen des elliptischen Schnittes respective mit b′ und c′ bezeichnen, so werden diese von der Normallinie der Ellipse d. i. von der Richtung der Kraft P′ geschnitten werden. Wenn ferner r′ und n′ dieselben Bedeutungen für den Schnitt haben, wie r und n für das Ellipsoid, so ist

$$\text{arc. cos}\left(\frac{dn'}{dr'}\right) = \text{arc. tang}\left(\frac{dz}{dy}\right) - \varphi$$

wo φ den Polarwinkel der Ellipse bezeichnen soll, so dass man hat

$$r\cos\varphi = z;\quad r\sin\varphi = y.$$

Bezeichnet B′ die Accelerationen im Scheitel der Axe b′ und zwar nach ihrer Richtung geschätzt, so ist nach der unter (5) und (6) aufgestellten Beziehung

$$P'\delta n' = B'\delta b'$$

und demgemäss

$$P' = \frac{B'b'}{r' \cos\left(\text{arc. tang}\,\frac{dz}{dy} - \varphi\right)}$$

Nun ist

$$\cos\left(\text{arc. tang}\,\frac{dz}{dy} - \varphi\right) = -\cos\varphi\,\frac{dy}{ds} + \sin\varphi\,\frac{dz}{ds}$$

und weil $P' = (Y + iy)\frac{ds}{dz}$ ist,

wird

$$(Y + iy)\left\{z\frac{dy}{dz} - y\right\} = B'b' \quad (45)$$

mithin

$$(Z + iz)\left\{z - y\frac{dz}{dy}\right\} = B'b'$$

Hieraus folgt noch

$$P' = B'b'\,\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{z - y\frac{dz}{dy}} = \frac{B'a'}{b'} \quad (46)$$

Aus den Gleichungen

$$(Y + iy) : y = B : b$$
$$(Z + iz) : z = C : c$$

lässt sich ferner ziehen

$$B' : b' = B : b$$
$$C' : c' = C : c$$

weswegen auch für einen solchen Schnitt des Ellipsoides die analoge Beziehung stattfindet

$$\frac{B'y'^2}{b'} + \frac{C'z'^2}{c'} = B'b' \qquad (47)$$

wobei stets

$$B'b' = Bb\left(1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)$$

d. h. gleich einer Constanten ist.

Für einen den Coordinatenebenen parallel gelegten Schnitt, gilt also, sobald nur die Componenten auch parallel dem jedesmaligen Schnitte geschätzt werden, ganz Aehnliches, wie für das ganze Ellipsoid; und eine nähere Betrachtung würde uns davon belehren, dass dasselbe für jeden beliebigen Schnitt des Ellipsoides richtig sei: die Resultante ist der Normalen des Bogenelements, in welchem der Punct liegt, direct proportional.

Legt man irgend eine Gerade durch das Ellipsoid, so ist für eine und dieselbe Niveaufläche nach (4)

$$T ds = T' ds'$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden Ellipsoide folgt die Gleichheit von ds und ds', so dass man für diesen Fall immer die Gleichheit von T und T′ erhält.

§ 5.

Ueber die Curven und Flächen gleicher Schwere. — Druck im Innern.

Es ist zunächst von Interesse die Eigenschaften der isodynamischen Linien und Flächen auf einem im Gleichgewichte befindlichen dreiaxigen Ellipsoide zu untersuchen. Mit diesem Namen belegen wir die Verbindungen aller derjenigen Puncte, auf welche die Schwere mit gleicher Intensität wirkt. Die Constanz von P muss stattfinden für die Curven, deren Normalen in denselben Entfer-

nungen die drei Coordinatenebenen durchdringen. Diese Curven stellen sich dar, soweit es die Oberfläche des Ellipsoids betrifft, als die Durchschnittscurven zweier Ellipsoide, deren Gleichungen sind:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{constans} = P = Aa \sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \end{array} \right.$$

Setzen wir die constante Grösse gleich ma, wo m im Allgemeinen einen Bruch bedeutet, so wird die Gleichung des andern mit dem wirklichen concentrischen und fingirten Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2m^2} + \frac{a^2y^2}{b^4m^2} + \frac{a^2z^2}{c^4m^2} = 1 \quad (48)$$

Ist das wirkliche Ellipsoid dergestalt, dass $c > b > a$, so ist das fingirte ein solches, bei dem die x Axe m mal so gross wie a, d. i. kleiner, die y Axe $\frac{b}{a}$ m mal so gross wie b und die z Axe $\frac{c}{a}$ m mal so gross wie c ist. Wir ziehen folgende Schlüsse daraus: es ist

1) stets $a' < a$, weil $a' = ma$;

Setzt man die drei Halbaxen des fingirten Ellipsoides gleich a', b' und c', so bleibt

2) stets $b' > b$ und $c' > c$, wenn $m > \frac{B}{A}$ oder was dasselbe ist, $m > \frac{a}{b}$ ist;

3) immer $b' < b$, aber $c' > c$, wenn $\frac{B}{A} > m > \frac{C}{A}$ oder auch $\frac{a}{b} > m > \frac{a}{c}$ ist.

Im Allgemeinen lassen sich also stets zwei solcher Curven auf dem Ellipsoide angeben. Beginnt man mit $m = 1$, so gibt

es nur zwei Puncte, nämlich die Scheitel der x Axe, oder die beiden wirklichen Pole, welchen die erwähnte Beschaffenheit zukommt; wird endlich $m' = \frac{a}{c}$, so berührt das zweite Ellipsoid nur die Scheitel der Axe c. Die Axe a' ist zugleich $\frac{a^2}{c}$, $b' = \frac{b^2}{c}$, mithin $a' < b' < c'$ und das zweite Ellipsoid liegt jetzt ganz inwendig, während es anfangs das wirkliche einhüllte; denn für $m = 1$ wird $a' = a$, $b' = \frac{b^2}{a}$, $c' = \frac{c^2}{a}$. Endlich wird noch für $m = \frac{a}{b}$

$$a' = \frac{a^2}{b}; \quad b' = b; \quad c' = \frac{c^2}{b}$$

und in diesem Falle berühren sich die beiden isodynamischen Curven in dem Scheitel der Axe b, wo sich dieselben halbiren, die Hälfte gegenseitig vertauschen, und sich wieder von einander entfernen.

Es wäre von besonderem Interesse zu untersuchen, ob es auch auf unserm Planeten solche Curven gäbe, die von den Parallelkreisen zu beiden Seiten des Erdsphäroids regelmässig oder symmetrisch abweichen; auch ist es nicht als unwahrscheinlich anzunehmen, dass heterogene Planeten die Gestalt eines dreiaxigen Sphäroides als permanente Gleichgewichtsfigur annehmen können. Indess wir werden weiter unten sehen, dass die untere Grenze der Ellipticität eines im Gleichgewicht befindlichen dreiaxigen Ellipsoides überhaupt weit höher liegt, als die Ellipticität des Erdballs, und dass sein Rotationsmoment V oder $\frac{i}{2\pi\varrho f}$, welches den Werth 0,00229971 *) hat, nach Meyer's Berechnung das Axenverhältniss

*) Dieser Werth V, den man erhält, wenn man den von Laplace in seiner Mechanik des Himmels lib. III cap. III berechneten Werth

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1{,}048 : 19{,}57$$

zur Bedingung des Gleichgewichts macht. Somit dürfte die Hoffnung die betreffende Art isodynamischer Curven auf unserm Erdball zu entdecken wol vergeblich sein.

Von der Gestalt dieser Curven verschafft man sich eine deutlichere Vorstellung, wenn man ihre Projectionen auf die drei Coordinatenebenen betrachtet. Aus den Gleichungen der beiden Ellipsoide kann man sich durch Elimination drei Gleichungen zwischen je zwei unbekannten Grössen verschaffen, nämlich

$$\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{\lambda'^2}{1+\lambda'^2}\right) = 1 - m^2 \qquad (49)$$

$$\frac{x^2}{a^2}\lambda^2 - \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{1+\lambda'^2}\right) = (1+\lambda^2)\, m^2 - 1 \qquad (50)$$

$$\frac{x^2}{a^2}\lambda'^2 + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{1+\lambda^2}\right) = (1+\lambda'^2)\, m^2 - 1 \qquad (51)$$

Die Projectionen der isodynamischen Curven auf die yz und xy Ebene stellen mithin Ellipsen, die Projectionen auf die xz Ebene Hyperbeln dar. Ist m gleich der Einheit, so werden y und z gleich 0, und $x = \pm a$; für m gleich $\frac{a}{b}$ wird die Projection (49) eine Ellipse, deren Halbaxen b und $\frac{c^2\lambda}{b\lambda'}$ sind, während (50) in die Gleichung zweier sich im Coordinatenanfangspuncte schneidenden Geraden

q mit $^2/_3$ multiplicirt, ist am Schlusse der Abhandlung von Meyer in Crelle's Journal durch einen Druckfehler in 0,0029972 verwandelt. Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf zwei andere daselbst vorkommende Fehler aufmerksam machen: aus Formel (10) in § 3 folgt

$$V = \frac{4pp}{(1+pp)\,(9+pp)},$$

weshalb die Bedingung der Realität von p erfordert: $V < {}^1/_4$; ausserdem Z. 6 vom Ende lies $\alpha = \beta = 1{,}00433441$.

übergeht. Dieser Durchschnitt geschieht unter einem Winkel, der sich ausdrücken lässt durch

$$2 \text{ arc. tang} \sqrt{\frac{a^4 (c^2 - b^2)}{c^4 (b^2 - a^2)}} \qquad (52)$$

Die Projection der betreffenden isodynamischen Curve auf die xy Ebene bildet eine Ellipse, deren Halbaxen die Werthe b und $\frac{a^2}{b}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2}$ besitzen.

Vermöge der Gleichung (52) wird man nun im Stande sein, diese singuläre Form der Curve auch durch zwei unter jenem Winkel gegen einander geneigte, durch den Mittelpunkt und die y Axe gelegte Ebene auf dem Ellipsoide zu beschreiben. Da aber ein Ellipsoid durch Ebenen in Ellipsen geschnitten wird, so sind die beiden isodynamischen Curven in diesem Falle zwei congruente und concentrische Ellipsen, deren eine Halbaxe gleich b und deren andere gleich $a\sqrt{1 + \lambda^2 \frac{c^2}{b^2}}$ gefunden wird. Wäre beispielsweise in einem im Gleichgewicht befindlichen dreiaxigen Ellipsoide das Verhältniss der drei Axen wie 1 : 1,018 : 14,8, so ergibt sich daraus der Werth des Neigungswinkels (52) zu $39^0\ 1'$. Das Ellipsoid (48) hat aber nicht bloss die merkwürdige Eigenschaft, dass es jedesmal die isodynamischen Curven bestimmt, sondern es vereinigt sogar alle isodynamischen Puncte des ganzen Ellipsoides in sich; oder man kann sagen: es bestimmt die isodynamischen Flächen.

Denn es ist das constant zu erhaltende

$$P = mA = mA' \frac{a}{a'}$$

wo A' und a' sich auf eine innere Niveaufläche beziehen. Welche Gleichung muss denn nun das zweite Ellipsoid annehmen, damit die innere Niveaufläche in einer Curve geschnitten wird, deren

Puncte ebenfalls mit einer Kraft mA angezogen werden? Ist die Gleichung der innern Fläche

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

so soll

$$P = mA' \frac{a}{a'} = A'a' \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^4} + \frac{y^2}{b'^4} + \frac{z^2}{c'^4}\right)}$$

sein oder was dasselbe ist

$$\frac{a^2x^2}{m^2a^4} + \frac{a^2y^2}{m^2b^4} + \frac{a^2z^2}{m^2c^4} = 1$$

worin die Identität mit dem Ellipsoide (48) erkennbar ist. Hieraus geht denn hervor, dass die isodynamischen Flächen ellipsoidische Flächen sind, welche im Innern der Masse liegen, und deren Halbaxen sich verhalten wie die Quadrate der Halbaxen des Hauptellipsoides; oder da

$$a^2 : b^2 : c^2 = n_{yz} : n_{xz} : n_{xy} \qquad (53)$$

wie die Normalen irgend welchen Punctes einer Niveaufläche. Aus den Gleichungen (49) (50) (51) ist auch leicht zu ersehen, dass die gedachten Projectionen der isodynamischen Curven für alle drei Ebenen unter sich ähnlich sind. An einem aus Holz leicht zu verfertigenden dreiaxigen Ellipsoide kann man sich am besten eine klare Vorstellung von diesen Linien durch Zeichnung verschaffen.

Untersuchen wir jetzt auch die Grösse des hydrostatischen Druckes im Innern der Masse. Da die innern Niveauflächen ähnlich und zugleich Oberflächen gleichen Druckes sind, so wird, wenn für die oberste die exacte Gleichung (33) gilt, sich für die innern nur der Werth der Constanten ändern. Es ist nun beim Uebergange von einer Schicht zur andern

$$A'\partial a = X\partial x + (Y + iy)\partial y + (Z + iz)\partial z$$

und da $-\delta p = A'\delta a$ (6) gefunden worden ist, so ist zugleich die Grösse des hydrostatischen Druckes in allen Puncten des Systems enthalten in der Formel

$$Aa - 2p = \frac{A}{a}\, x^2 + \frac{B}{b}\, y^2 + \frac{C}{c}\, z^2 \qquad (54)$$

da bei der Integration die Constante C so gewählt werden muss, dass (const. — 2p) für p gleich Null in Aa übergeht.

Von Interesse ist es noch die absolute Massenattraction F irgend eines Punctes durch A und i auszudrücken. **Sie ist den Abschnitten der Verlängerung der Resultanten durch eine der drei Coordinatenebenen proportional.** Denn wenn wir die Abschnitte respective mit S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} benennen, so ist klar, dass $F : X = S_{yz} : x$ ist; da aber bekanntlich $X = \frac{A}{a}\, x$ gefunden ist, so ergibt sich daraus die in obigem Satze ausgesprochene Beziehung

$$F = \frac{A}{a}\, S_{yz} \qquad (55)$$

Werden die absoluten Massenanziehungen in den drei Scheiteln mit Σ, X, Ω bezeichnet, welche Ausdrücke reelle Functionen von λ und λ' bedeuten, so ist

$$F = \sqrt{\left(\Sigma^2 \frac{x^2}{a^2} + X^2 \frac{y^2}{b^2} + \Omega^2 \frac{z^2}{c^2}\right)}$$

Setzt man F gleich einer Constanten $\frac{1}{m}$ und beschreibt die in dieser Gleichung enthaltene ellipsoidische Fläche in einem und demselben Axensystem concentrisch mit dem Hauptellipsoid, so sind die gemeinschaftlichen Puncte lauter solche, welche gleich intensiv von der absoluten Massenattraction nach dem Innern getrieben werden. Die Durchschnittsfläche stellt wiederum eine der Isodynamen der absoluten Massenanziehung dar; die hiedurch auf den einzelnen Niveauflächen beschriebenen Curven sind in ihrem

Verlauf den früheren ähnlich und ihre Projectionen auf die drei Ebenen Curven zweiten Grades.

Der Winkel, den die Resultanten F und P mit einander bilden, ist für das Rotationsellipsoid, wenn man der Kürze wegen r für $\sqrt{y^2 + z^2}$ schreibt,

$$\text{arc. cos}\left(\frac{F^2 + P^2 - i^2r^2}{2FP}\right) \qquad (56)$$

Dieser Ausdruck geht für die Maxima und Minima von x und r stets in Null über, d. h. F und P wirken am Pol und Aequator in einerlei Richtung. Das Maximum dieser Abweichung wird gefunden, wenn man r durch x ausdrückt, den Bogen gleich v setzt und die Wurzeln der Gleichung $\frac{dx}{dv} = 0$ berechnet. Die gesuchten Puncte lassen sich dann durch Auflösung dieser Gleichung, welche die Form

$$x^4 + mx^2 + n = 0$$

annimmt, in Längen der Ordinate x ausdrücken und geometrisch bestimmen.

Sehen wir nun wie sich die gesammten oben zusammengestellten Verhältnisse auf einem Rotationsellipsoide gestalten. Die Untersuchung von § 3. kann in diesem speciellen Falle noch etwas anders geführt werden, wenn es sich darum handelt die Figur einer unbeweglichen Masse zu bestimmen. Betrachten wir irgend einen Meridian und beziehen seine Puncte auf zwei Coordinaten x und r′, wenn $\sqrt{y^2 + z^2}$ gleich r′ genommen wird; weil nun der Körper in allen Lagen um die Axe congruent ist, so kann man auch $\sqrt{Y^2 + Z^2} = R'$ setzen. Die Formel (9), modificirt in der Weise, dass jetzt

$$A\delta a = (X \cos\varepsilon + R' \sin\varepsilon)\, \delta r$$

zu setzen ist, liefert

$$Xx + R'r' = Xx + \sqrt{Y^2 + Z^2} . \sqrt{y^2 + z^2} = Aa$$

Combinirt man sie mit (14), so resultirt daraus die Beziehung

$$Yz - Zy = 0$$

oder die beiden Gleichungen

$$Y = my; \quad Z = mz$$

Setzt man diese Werthe in die Differenzialgleichung (3) der Oberfläche ein und integrirt, so erzielt man damit die Gleichung

$$2\int Xdx + my^2 + mz^2 = \text{constans}$$

und wenn man sie von der Oberflächengleichung

$$Xx + my^2 + mz^2 = Aa$$

subtrahirt

$$2\int Xdx = Xx + \text{const.}$$

Differenzirt man nach x, so ist

$$2\,Xdx = Xdx + x\left(\frac{dX}{dx}\right)dx$$

und

$$\frac{dx}{x} = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)}{X}dx$$

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$X = lx$$

Es ist mithin

$$lx^2 + m(y^2 + z^2) = Aa$$

die gesuchte Gleichgewichtsfigur; d. h. das Rotationsellipsoid, welches nun derselben Analysis zu unterwerfen ist, welche das Axenverhältniss für eine ruhende Flüssigkeit durch Rechnung bestimmt.

Die Gleichung (40) erhält hier die einfachere Form

$$P = A \frac{\left(\frac{\cos \varepsilon^2}{a^2} + \frac{a^2 \sin \varepsilon^2}{b^2 b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\cos \varepsilon^2}{a^2} + \frac{\sin \varepsilon^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= A \sqrt{1 - \frac{a^2 \lambda^2 \sin \varepsilon^2}{b^2 (1 + \lambda^2 \cos \varepsilon^2)}}$$

und (41) die sehr einfache

$$P = A \frac{a}{b} \sqrt{1 + \lambda^2 \frac{x^2}{a^2}} \qquad (58)$$

Auch die isodynamischen Curven und Flächen gestalten sich nun sehr einfach: die drei Projectionen der ersteren nehmen die folgenden Formen an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} &= (1 - m^2) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \\ \frac{x^2}{a^2} - 0 \frac{z^2}{b^2} &= \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} m^2 - \frac{1}{\lambda^2} \\ \frac{x^2}{a^2} - 0 \frac{y^2}{b^2} &= \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} m^2 - \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

d. h. die Projectionen der isodynamischen Curven eines Rotationsellipsoides auf die yz Ebene sind Kreise, auf die beiden andern Ebenen Gerade, mit der Projection des Aequators parallel laufende Linien. Der Ausdruck (52) wird dabei der Null gleich, d. h. die Isodyname des mittleren Poles geht in den Aequator über und ist keine Doppelcurve mehr wie beim dreiaxigen Ellipsoid.

§. 6.

Ueber das Axenverhältniss eines im Gleichgewichte befindlichen Ellipsoides im Allgemeinen.

Bei der Untersuchung der Oberflächengleichung entdeckte d'Alembert, dass es für eine und dieselbe Rotationsgeschwindigkeit und Dichtigkeit der Masse mehrere elliptische Sphäroide

gäbe, die permanente Gleichgewichtsfiguren bilden könnten, und **Laplace** bewies, dass es deren jedesmal nur zwei gäbe. Wenn er dies von den abgeplatteten Rotationsellipsoiden beweist, so hat er vollkommen Recht. **Thom. Claussen** und **Meyer** haben in ihren Abhandlungen den späteren **Jacobi**'schen Lehrsatz bewiesen, dass auch ein dreiaxiges Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur sein könne. Durch die weiter unten folgende Betrachtung wird diese Anzahl noch um zwei vermehrt werden, so dass es innerhalb gewisser Gränzen der Revolutionsdauer im Ganzen fünf Gleichgewichtsfiguren geben kann und zwar lauter ellipsoidische, welche denselben Bedingungen entsprechen. Davon sind die drei ersten stabil und die zwei letzteren labil.

1. **Die beiden abgeplatteten Rotationsellipsoide.** Bei seiner Vorausbestimmung der abgeplatteten Kugelgestalt der Erde setzte **Newton** stillschweigends voraus, dass das als homogen betrachtete Primordialfluidum vermöge der vereinigten Kräfte sich in ein abgeplattetes Rotationsellipsoid zu formen sich bestrebt habe. Er berechnete den Druck der Centralsäule des Aequators und des Poles auf den Mittelpunct O (Fig. 1). Hieraus fand er in Betracht der Centrifugalkraft am Aequator das Verhältniss der beiden Durchmesser

$$AO : OP = 230 : 229$$

Laplace findet in seiner Mechanik durch eine freilich viel genauere Rechnung fast dasselbe Verhältniss, nämlich 231,7 : 230,7. Diess lässt sich auf folgende Weise deduciren: Bezeichnet f die Anziehungskraft für die Einheit der Masse und der Entfernungen, so sind die Componenten der Anziehung der flüssigen Masse auf einen Punct (x, y, z) der Oberfläche

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{4\pi f\varrho x b^2}{\lambda^3 a^3}(\lambda - \text{arc. tang}\,\lambda) \\ Y &= -\frac{2\pi f\varrho y b^2}{\lambda^3 a^3}\left(\text{arc. tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \\ Z &= \frac{Y}{y}\,z \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Geht man von x zu a und von y zu b über, so erhält man die Massenanziehungen A' und B'; addirt man zu B' die Mittelpunctsfliehkraft ib oder $2\pi f\varrho V b$ und nimmt Rücksicht auf die Gleichung

$$Aa = Bb = (B' + ib)b$$

so erhält man

$$\frac{3\lambda + V\lambda^3}{3 + \lambda^2} - \text{arc. tang } \lambda = 0. \qquad (61)$$

Ist V gegeben, so liefert diese Gleichung alle möglichen Werthe von λ, welche der Bedingung des Gleichgewichts genügen. Da i am Aequator gleich 0,03390? Meter gefunden wird, so ergibt sich hieraus V = 0,00229971. Die Wurzeln der Gleichung (61) liefern darnach die beiden Axenverhältnisse 1,0043344 und 680,49. Um zu untersuchen, wie viele Wurzeln die Gleichung habe, differenzire man die Function (61) nach λ und setze den Differenzialquotienten gleich Null. Dies gibt

$$V\lambda^4 + 2(3V - 2)\lambda^2 + 9V = 0 \qquad (62)$$

und da nur die positiven Werthe von λ eine Bedeutung haben, so gibt es in Bezug auf diese höchstens ein Maximum und ein Minimum der Function und da für $\lambda = 0$ der Differenzialcoeffizient Null, für wachsende und für unendliche λ positiv ist, so wird die Function nur zweimal Null, d. h. sie hat nur zwei Wurzelwerthe.

Der Werth V hat nun eine Gränze, über welche hinaus kein Gleichgewicht mehr möglich ist, nämlich V = 0,2246. An derselben ist nur eine einzige Figur möglich. Man findet diesen Gränzwerth mit Rücksicht auf das Vorhergehende, wenn man denjenigen Werth V bestimmt, welcher den Gleichungen F = 0 und dF = 0 zugleich Genüge leistet. Dies gibt die Beziehungen

$$V = \frac{4\lambda^3}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)} \qquad (63)$$

$$\frac{\lambda(7\lambda^2+9)}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)} - \text{arc. tang}\,\lambda = 0 \qquad (64)$$

und der Werth λ', welcher der letzteren Gleichung genügt, ist $\lambda' = 2,5292$. Hieraus erhält man $V' = 0,2246$ und $\sqrt{1+\lambda'^2} = 2,7198$. Nimmt von dieser Gränze an die Winkelgeschwindigkeit ab bis zu Null oder die Dichte der Masse zu bis ∞, so geht die Figur entweder über in ein elliptisches Sphäroid und endlich in die Kugel oder in ein sehr abgeplattetes Ellipsoid, dessen Gränze der unendliche circuläre Discus ist.

2. **Das dreiaxige Ellipsoid.** Um die Ideen leichter zu fixiren, wird es hier am Orte sein, eine Uebersicht über die Metamorphose der drei stabilen Figuren zu geben. Dazu mögen uns die Resultate dienen, welche von Meyer in seiner vortrefflichen Arbeit andern schon bekannten hinzugefügt hat. Dort weist er nochmals nach, dass es nur innerhalb der Gränzen $V = 0$ und $V' = 0,2246$ permanente Gleichgewichtsfiguren gäbe und zwar von $V = 0$ bis $V^0 = 0,18711$ drei, von V^0 bis V' nur zwei, bei V' aber eine einzige. Der Werth $V = 0$ erfordert die drei Axenverhältnisse

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : \infty : \infty,$$
$$\alpha' : \beta' : \gamma' = 1 : 1 : 1,$$
$$\alpha'' : \beta'' : \gamma'' = 1 : 1 : \infty,$$

der Werth $V^0 = 0,18711$ die beiden Proportionen

$$a^0 : b^0 : c^0 = 1 : 1,7161 : 1,7161$$
$$a_0 : b_0 : c_0 = 1 : 5,1282 : 5,1282,$$

der Werth $V' = 0,2246$

$$a' : b' : c' = 1 : 2,7198 : 2,7198.$$

Lässt man V von dieser Gränze allmählig bis zu V^0 abnehmen, so geht das Ellipsoid $K(a', b', c')$ in eins der beiden Ro-

tationsellipsoide über, deren Excentricitäten divergiren, so dass das eine sich $K(a^0, b^0, c^0)$, das andere sich $K(a_0, b_0, c_0)$ nähert; schreitet man von V^0 bis zur Null weiter fort, so nähert sich $K(a_0, b_0, c_0)$ dem unendlichen kreisförmigen Discus, und $K(a^0, b^0, c^0)$ geht in zwei andere Ellipsoide über, entweder bleibt es ein Rotationsellipsoid, welches sich der Kugel nähert, oder wird ein ungleichaxiges Ellipsoid $K(\alpha, \beta, \gamma)$, welches sich dem unendlichen Cylinder mit kreisförmiger Basis nähert. Diese Metamorphose lässt sich durch folgendes Schema versinnlichen:

$(V = 0{,}2246)$ $K(a', b', c')$ (65)

$(V = 0{,}1871)$ $K(a_0, b_0, c_0)$; $K(a^0, b^0, c^0)$

$K(a^0, b^0, c^0)$; $K(\alpha, \beta, \gamma)$

$(V = 0)$ unendlicher Discus — Kugel — unendlicher Cylinder

Es mögen nun auch hier einige Formeln ihren Platz finden, vermittelst deren man mit ziemlicher Genauigkeit für kleine V auf einmal die drei Axen und i bestimmen kann. Wir haben zu dem Ende die Kräfte A, B, C als Functionen von λ und λ' anzugeben, Diese liefert bekanntlich das elliptische Integral

$$\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda^2 u^2)^{1/2} (1 + \lambda'^2 u^2)^{1/2}} = F$$

Man verwandele den Factor $(1 + \lambda^2 u^2)^{-1/2}$ in eine Reihe und integrire sie. Mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen der dritten und höheren Ordnungen erhält man den Werth des gesuchten Integrals

$$F = \frac{\sqrt{1+\lambda'^2}}{\lambda'^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4}\lambda^2 + \frac{3}{48}\lambda^4 - .. \right\} + \frac{3\lambda^2 \sqrt{1+\lambda'^2}}{16\lambda'^4} + \dots$$

$$- \frac{\log(\lambda' + \sqrt{1+\lambda'^2})}{2\lambda'^3}$$

$$\frac{d(\lambda'F)}{d\lambda'} = \frac{\log(\lambda' + \sqrt{1+\lambda'^2})}{\lambda'^3} - \frac{1}{\lambda'^2\sqrt{1+\lambda'^2}}\left\{1 + \frac{1}{4}\lambda'^2 - ..\right\}$$

$$- \frac{1}{\lambda'^4\sqrt{1+\lambda'^2}}\left\{\frac{3}{4}\lambda'^2 - ..\right\}$$

$$\frac{d(\lambda F)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{1+\lambda'^2}}{\lambda'^2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\lambda'^2 + \frac{15}{48}\lambda'^4 - ..\right\} + \frac{9}{16}\lambda'^2\,\frac{\sqrt{1+\lambda'^2}}{\lambda'^4} + ..$$

$$- \frac{\log(\lambda' + \sqrt{1+\lambda'^2})}{2\lambda'^3}$$

Substituiren wir nun für λ^2 einen beliebigen kleinen Werth z. B. 0,03633, so lässt sich vermittelst der Gleichung (21) V und auch λ' berechnen. Die Theorie der Anziehung der Ellipsoide auf einen Punct der Oberfläche lehrt, dass

$$X = -\frac{4\pi f\varrho bc}{a^2}xF\,;\quad (Y + iy) = -\frac{4\pi f\varrho bc}{a^2}\,y\,\frac{d(\lambda F)}{d\lambda} + iy\,;$$

$$(Z + iz) = -\frac{4\pi f\varrho bc}{a^2}\,z\,\frac{d(\lambda' F)}{d\lambda'} + iz\,;$$

und es müssen nun zur Erhaltung des Gleichgewichts der Massen folgende Gleichungen stattfinden:

$$A = -2\pi f\varrho b\left\{0{,}99076 + \frac{1{,}00417}{\lambda'^2} - \frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^3}\sqrt{1+\lambda'^2}\right\}$$

$$B = -2\pi f\varrho b^2\left\{0{,}97357 + \frac{1{,}01341}{\lambda'^2} - \frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^3}\sqrt{1+\lambda'^2}\right\} + ib$$

$$C = -4\pi f\varrho b\left\{\frac{\log 2\lambda'}{\lambda'^3}(1+\lambda'^2) - 1{,}00696\frac{\sqrt{1+\lambda'^2}}{\lambda'^2} + ..\right.$$

$$\left. - 0{,}02693\frac{\sqrt{1+\lambda'^2}}{\lambda'^4}\right\} + i\sqrt{1+\lambda'^2} \qquad (66)$$

Multiplicirt man die erste mit 1, die zweite mit 1,018, die dritte mit $\sqrt{1+\lambda'^2}$, so erfordert die Gleichheit der daraus entspringenden Ausdrücke

$$\frac{i}{2\pi f\varrho} = 0{,}0179\,;\quad \sqrt{1+\lambda'^2} = 14{,}8$$

wodurch das Axenverhältniss bestimmt ist, nämlich

$$a : b : c = 1 : 1{,}018 : 14{,}8$$

Meyer hat dasselbe auch in Bezug auf den Erdball berechnet, indem er sich des Werthes $V = 0{,}0022997$ bedient, und die Proportion

$$a : b : c = 1 : 1{,}018 : 19{,}57$$

gefunden hat. Dass dieser und der oben aus $V = 0{,}0179$ von mir berechnete Werth von b gleich ausgefallen sind, mag wol daher rühren, dass für sehr kleine Werthe von V oder sehr grosse von λ' der Quotient $\frac{d\lambda}{d\lambda'}$ sehr klein wird.

3. Das oblonge Rotationsellipsoid im Gleichgewicht. Wenn man eine solche mathematische Speculation erschöpfen will, so sind die eben betrachteten Gleichgewichtsfiguren nicht die einzigen. So lange freilich das Axenverhältniss eines sich um seine längste Axe drehenden Ellipsoides ein endliches ist, ist kein Gleichgewicht möglich; allein dies tritt ein, wenn die Drehungsaxe unendlich gross gegen die übrigen Axen wird. Wir haben also unter der Voraussetzung $a = \infty$ die Wurzeln der Gleichung

$$Bb = Cc \text{ oder } (B' + ib)b = (C' + ic)c$$

zu untersuchen, wo B' und C' die von der Schwerkraft gesonderten absoluten Massenanziehungen bedeuten. Für den unendlichen Cylinder mit elliptischem Querschnitte gelten nun folgende Gleichungen:

$$X = 0;\ Y = -4\pi f\varrho \frac{c}{b}\, y \int_0^1 \frac{udu}{\sqrt{1 + \lambda^2 u^2}^3};$$

$$Z = -4\pi f\varrho \frac{c}{b} z \int_0^1 \frac{udu}{\sqrt{1 + \lambda^2 u^2}};$$

wenn die y-Axe die kürzeste und $\frac{c^2 - b^2}{b^2} = \lambda^2$ gesetzt wird (Siehe d. Anhang.) Nach ausgeführter Integration resultirt

$$Y = -\frac{4\pi f\varrho b\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}y;\quad Z = -\frac{4b\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}z \qquad (67)$$

Da $y^2 + (1+\lambda^2)z^2 = b^2$ ist, so folgt aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, dass die absolute Massenattraction in allen Puncten der Oberfläche eine constante Grösse hat, nämlich

$$4\pi f\varrho\frac{bc}{b+c}$$

Setzen wir die Werthe in die Gleichung ein, welche die Gleichgewichtsbedingung ausdrückt, und bezeichnen $\sqrt{1+\lambda^2}$ mit p, so wird

$$p^3 - \frac{2-V}{V}p^2 + \frac{2-V}{V}p - 1 = 0 \qquad (68)$$

Die eine Wurzel dieser Gleichung ist gleich 1, enthält also kein V; die beiden andern sind in der folgenden enthalten

$$p^2 - 2\left(\frac{1-V}{V}\right)p + 1 = 0 \qquad (69)$$

nämlich

$$p = \frac{1-V}{V} \pm \sqrt{\left(\frac{1-V}{V}\right)^2 - 1}$$

woraus $V < {}^1\!/\!_2$ als die Bedingung der Realität von p entspringt. Nach (69) lässt sich V in folgender Weise ausdrücken

$$V = \frac{2bc}{(b+c)^2}$$

Von $V = {}^1\!/\!_2$ ab an hat also die Gleichung (68) stets drei reelle positive Wurzeln. Das Gleichgewicht erfordert aber die Positivität von $-Bb$ und $-Cc$; daher finden auch die Bedingungen $B' > ib$ und $C' > ic$ statt oder die davon abgeleitete $V \nless \frac{2b}{b+c}$. Es kann also, da der grösste Wurzelwerth p gleich 1

ist, V nie grösser als 1 werden und man kann sagen: Für den unendlichen elliptischen Cylinder im Gleichgewichte sind innerhalb der Grenzen $V = 0$ und $V'' = 0{,}5$ zwei verschiedene Axenverhältnisse, innerhalb der Grenzen V'' und $V''' = 1$ nur ein einziges möglich. Obwol nämlich (68) drei Wurzelwerthe hat, so sind doch zwei von ihnen nur einander reciprok, weil ja

$$R - \sqrt{R^2 - 1} = \frac{1}{R + \sqrt{R^2 - 1}}$$

der dritte Cylinder also nur als der zweite um 90° gewälzt erscheint. Innerhalb der Grenzen $V^0 = 0{,}1871$ und $V = 0$ sind also jedesmal fünf verschiedene Gleichgewichtsfiguren möglich und eine von ihnen wird die Flüssigkeit annehmen. Versinnlichen wir uns die Gesammtheit der Resultate schematisch mit Hinzufügung der in (65) dargestellten Figurationen, so gestalten sich dieselben in folgender Weise, indem wir von der Grenze $V = 1$ bis zu $V = 0$ herabsteigen:

$V''' = 1{,}0$ . . . . Cylind. circul.

$V'' = 0{,}5$ . . . . . . Cyl. circ. | Cyl. ell.

$V' = 0{,}2246$ Ellips. revol.

Ell. revol. α | Ell. revol. β

$V^0 = 0{,}1871$

	I	II	III	IV	V
	Ell. revol. α	Ell. III ax. inaequ.	Ell. revol. β	Cyl. circ.	Cyl. ellipt.
$V_e = 0{,}0022997$		»	»	»	»
$V = 0$	Kugel	Unendl. Cyl.	Unendl. Discus	Unendl. Cyl.	Unendl. Lamelle
a:b:c	1:1:1	1:1:∞	0:1:1	∞:1:1	∞:1:0

Hieraus geht denn das wunderbare Resultat hervor, dass während V von 1 bis Null abnimmt, die Anzahl aller möglichen Gleichgewichtsfiguren successive von 1 bis 5 zunimmt. Wir schliessen dies Capitel mit einer tabellarischen Uebersicht der fünf Axenverhältnisse, welche sich an einer Flüssigkeit manifestiren würden, für die wie bei dem Erdball $V_e = 0{,}0022997$ wäre:

I	$a = 1$,	$b = c = 1{,}00433411$
II		$b = 1{,}018$, $c = 19{,}57$
III		$b = c = 680{,}49$
IV	$a = \infty$	$b = 1$, $c = 867{,}68$
V		$b = c = 1$.

Ueber die

Oberflächengestalt solcher homogenen im Gleichgewichte befindlichen ringförmigen Planeten, deren Dicke sich allmählich ändert und gegen den radius vector verschwindend klein ist.

Laplace hat in seiner Mechanik des Himmels*) aus der Annahme, dass der Saturnring durch die Umdrehung einer Ellipse in einer Kreisperipherie erzeugt und deren Axen im Verhältniss zu dem Diameter des Ringes verschwindend klein seien, die Partialkräfte, welche auf ein Massentheilchen der Oberfläche wirken, sowie auch die Ellipticität der erzeugenden Figur in eine Formel gebracht. In der Folge soll nun gezeigt werden, dass unter den angenommenen Verhältnissen die Ellipse die einzig mögliche den Ring erzeugende Gleichgewichtsfigur sei.

Nehmen wir der grösseren Allgemeinheit wegen an, der Umkreis bilde eine unregelmässige Figur und es sei r der Abstand des Massenmittelpunctes vom Mittelpuncte der erzeugenden Figur. Es müsste sich leicht nachweisen lassen, dass eine solche geschlossene Figur im Umschwunge um ihren Schwerpunct, falls derselbe noch von einem das System anziehenden Centralkörper erfüllt wäre, eine Figur der Ebene zu bilden sich bestreben würde; für den Fall der Ruhe und des Nichtvorhandenseins eines solchen Centralkörpers, würde dies ceteris paribus zum Gleichge-

*) Méc. cél. livre III prop. 44—46.

wichte nicht erforderlich sein. Wir setzen daher voraus, es bilden die Mittelpuncte d. h. die Schwerpuncte der erzeugenden Figur eine continuirliche Figur der Ebene, ähnlich Fig. 6. Bezeichnen wir nun die Quadratur eines normalen Querschnitts der Peripherie allgemein mit q^2 und denken uns den ganzen Umkreis des Ringes in lauter kleine Cylinder getheilt, deren Länge Δs und deren Inhalt folglich gleich $q^2 \Delta s$ ist. Wenn ferner q von einer niedrigeren Ordnung als Δs angenommen wird, so ist für jeden Punct eines eben betrachteten Querschnittes die Anziehung Seitens eines entfernten Cylinderchens gleich gross und gleich gerichtet, so lange nur die Entfernung desselben sehr gross gegen q ist. Dies findet aber schon, wie klar ist, für den nächsten Cylinder statt, wenn wir uns nämlich den betreffenden Querschnitt durch die Mitte eines solchen cylindrischen Elementes des Umkreises gelegt denken. Die entfernten Theile des Ringes wirken also auf die Form des Querschnittes unendlich wenig ein gegen diejenigen, deren Distanzen von derselben Ordnung sind wie q d. h. gegen die Theile des Cylinders $q^2 \Delta s$, dessen Hälften zu beiden Seiten des Querschnittes liegen.

Legen wir nun durch den rad. vect. r des Schwerpuncts eines Querschnittes eine Ebene, die zur Ebene des Ringes normal gestellt ist, und fassen die Bewegung des Schnittes (Fig. 7) als eine relative auf, nämlich um sein eigenes Barycentrum, wodurch im Wesentlichen nichts geändert wird. Der scheibenförmige Schnitt PQP'Q' (Fig. 7) dreht sich relativ um eine durch den Schwerpunct O gehende verticale Axe PP', welche senkrecht zur yz-Ebene d. i. zu der des Ringes zu denken ist, während die Massentheilchen durch die Wechselwirkung der Centrifugalkraft und Massenattraction der zu beiden Seiten liegenden Cylinderhälfte im Gleichgewichte erhalten werden. Es ist leicht einzusehen, dass die Revolutionsdauer gleich der des ganzen Ringes ist, und dass die Bewegung gerade so vor sich geht, als drehe sich der Schwerpunct S des ganzen Ringes um den Schwerpunct O seines

Theiles. Wir denken uns den Cylinder nun in lauter prismatische Stäbe eingetheilt, deren Axen der des ganzen Cylinders parallel gerichtet sind und berechnen die Anziehung eines derselben auf irgend einen Punct. Nehmen wir alle x-Ordinaten parallel der Drehungsaxe, zur z-Axe den radius vector r, und den Schwerpunct des Schnittes zum Coordinaten-Anfangspuncte. Bedeutet alsdann c die normale Entfernung des Punctes (x, z) von dem unendlichen Prisma, ξ und ζ die Coordinaten des Punctes, in welchem das Prisma den Schnitt trifft, e′ seine Entfernung vom Puncte (x, z), ferner ω den Winkel, welchen der radius vector r mit der Axe des Cylinders bildet, φ die Neigung von e′ gegen den rad. vector, so lässt sich die nach der Richtung des Schnittes geschätzte Anziehung des unendlichen Prismas auf einen Punct berechnen: sie ist

$$\mu f \varrho \sqrt{1 - \cos\omega^2 \cos\varphi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e\,dl}{\sqrt{e^2 + l^2}^3} = \frac{2\mu f\varrho \sqrt{1 - \cos\omega^2 \cos\varphi^2}}{e}$$

und da e den Werth $e' \sqrt{1 - \cos\omega^2 \cos\varphi^2}$ besitzt

$$\left(\frac{dV}{de'}\right) = -\frac{2\mu f\varrho}{e'} \tag{70}$$

Weil nun die Richtung dieser Anziehung in der Ebene des Schnittes liegt, so verhält sich die Sache gerade ebenso, als wenn die einzelnen Molecüle des Schnittes irgend einen Punct desselben umgekehrt proportional ihren Entfernungen anzögen, indem man nach der oben gemachten Bemerkung von der Anziehung der übrigen Theile des Ringes abstrahiren darf, theils weil sie verschwindend klein ist, theils aber und besonders deshalb, weil sie allen Theilen des Schnittes eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilen würde, worüber bereits in § 1 abgehandelt worden ist. Wenn weiter unten der Effect eines Centralkörpers mit in Rechnung gezogen werden soll, ein Umstand, der wie wir sehen werden, für den Fall der Umdrehung erforderlich wird, so

nehmen wir diesen als sphärisch und ebenfalls homogen an. Da in diesem Falle das Gleichgewicht erfordert, dass die beiden Schwerpuncte zusammenfallen, so wird die Einwirkung des Centralkörpers stets so in Rechnung gezogen werden können, als wenn dieselbe von dem Schwerpuncte des Ringes ausginge und der Masse des Centralkörpers direct, dem Quadrate der Entfernung $\sqrt{(r+z)^2+x^2}$ umgekehrt proportional sei.

Durch ~~eine~~ der schon oben in § 2 angestellten ähnliche Betrachtungsweise gelangen wir nun zu dem Satze, dass die Niveaulinien des Schnittes einander ähnliche und ähnlich um sein Barycentrum gelegene Linien sind. Was sich dort (pag. 22) aus den beiden Ausdrücken $\frac{dm}{f^2}$ und $\frac{dm'}{f'^2}$ ableiten liess: dass die Summe der Anziehung zweier ähnlichen Körper auf ähnlich in beiden gelegene Puncte zweien homologen Linien der Körper proportional seien, ergibt sich hier ebenfalls aus den Werthen $\frac{d\xi d\zeta}{e}$ und $\frac{d\xi' d\zeta'}{e'}$; weil in diesen Quotienten die Zähler den Quadraten, die Nenner zweien homologen Linien der beiden ähnlichen Scheiben einfach proportional sind, so sind die sollicitirenden Kräfte zweien solchen Linien ebenfalls direct proportional. Dasselbe gilt von den Centrifugalkräften, welche bei der hier angenommenen relativen Bewegung des Systems den Abständen der Molecüle von der durch den Schwerpunct O gelegten x-Axe PP' proportional sind. Ohne die in § 2 und § 3 angewendeten Räsonnements unnütz zu wiederholen, geht hieraus unzweifelhaft hervor, dass die Ellipse die allein mögliche Figur des Schnittes sei, und dass hier dieselben Gleichungen gelten wie in § 3. Die Ellipticität es Schnittes wird noch abhängig sein von der Rotationsgeschwindigkeit; ebenso wird zwischen dieser und der Masse des

Centralkörpers, sowie dessen Entfernung eine bestimmte Beziehung statthaben.

Um die Ideen besser fixiren zu können, wollen wir die Formeln entwickeln, in welchen die Bedingungen des Gleichgewichtes enthalten sind. Wir haben schon im vorigen Capitel in § 6 die Anziehung eines unendlichen Cylinders auf einen Punct seiner Oberfläche abgeleitet. Da die in § 6 unter Nro. 3 berechneten Werthe die Totalanziehungen und also die nach der Richtung der Ebene eines Normal- oder Querschnitts des cylindrischen Ringelementes geschätzten Componenten darstellen, während wir hier einen Schnitt betrachten, der eine Neigung ω gegen die Axe des Cylinders hat, so werden sie durch die Grösse von ω eine Modification erleiden müssen, nämlich

$$X = -\frac{4\pi f\varrho \sin\omega \sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}}x; \quad Y = 0$$

$$Z = -\frac{4\pi f\varrho \sin\omega^2}{1+\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}}z \qquad (71)$$

Die Centrifugalkraft, welche das Theilchen dx dy dz im Puncte (x, z) erregt, ist gleich i(r + z) und multiplicirt man diesen Ausdruck in das Element der Richtung, so wird das Product gleich i(r + z) dz sein. Multiplicirt man die Anziehungen seitens des Ringes, welche sich auf die Anziehung zweier unendlicher Cylinder reduciren liess, in die Elemente ihrer Richtungen dx und dz, so resultirt hieraus Xdx und Zdz. Berücksichtigen wir endlich noch die zur grössern Allgemeinheit des Problems fingirte Existenz eines Centralkörpers, so beschränkt sich in unsrer Aufgabe seine Wirkung darauf, dass er einestheils den Schwerpunct des Schnittes zu verrücken strebt, theils der Ellipticität desselben nur eine andere Grösse gibt, ohne die elliptische Figur in eine andere zu verwandeln. Denn nehmen wir an, seine Masse sei gleich

M oder $\frac{4}{3}\pi\varrho' R^3$, so ist die Anziehung derselben auf den Punct (x, z) multiplicirt in das Element ihrer Richtung gleich

$$-\frac{\frac{4}{3}\pi f\varrho' R^3 d\sqrt{(r+z)^2+x^2}}{(r+z)^2+x^2}$$

also, wenn man nach vollführter Differenzirung x^2 und z^2 vernachlässigt,

$$-\frac{fM}{r^2}dz + \frac{2fM}{r^3}zdz - \frac{fM}{r^3}xdx \qquad (72)$$

Der erste Theil wirkt, wie man leicht sieht, nur auf den Schwerpunct des Schnittes; mit den beiden andern Ausdrücken der Partialkräfte bleibt die elliptische Krümmung der Oberfläche noch immer vereinbar. Wir sind also jetzt im Besitze der Producte, deren Summe als allgemeine Bedingung des Gleichgewichts nach (3) gleich Null sein muss. Dividirt man diese Summe durch $-2\pi f\varrho$, so geht daraus hervor:

$$\left(\frac{2\varrho' R^3}{3\varrho r^2} - rV\right)dz + \left(\frac{2\sin\omega^2}{1+\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{4\varrho' R^3}{3\varrho r^3} - V\right)zdz$$
$$+ \left(\frac{2\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{2\varrho' R^3}{3\varrho r^3}\right)xdx = 0. \qquad (73)$$

Diese Gleichung ist die Differenzialgleichung des Schnittes und identisch mit dem Differenzial von

$$z^2 + (1+\lambda^2)x^2 = c^2$$

nämlich

$$zdz + (1+\lambda^2)xdx = 0$$

Vergleicht man diese beiden Differenzialgleichungen mit einander, so geben daraus folgende zwei Beziehungen hervor:

$$\frac{2\varrho' R^3}{3\varrho r^2} - rV = 0 \text{ oder } r^3 = \frac{2\varrho' R^3}{3\varrho V} \qquad (74)$$

und

$$\frac{\dfrac{\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}} + V}{\dfrac{\sin\omega^2}{1+\sin\omega\sqrt{1+\lambda^2}} - 3V} = 1+\lambda^2 \qquad (75)$$

Die erstere dieser Gleichungen bestimmt die Umwälzungszeit des Ringes. Da dieselbe für alle Theilchen desselben constant ist und zwar der Wurzel aus V proportional, so geht aus (74) ebenfalls hervor:

$$r = \text{constans} \qquad (76)$$

d. h. der Ring kann nicht jede beliebige Form des Umkreises annehmen, wenn ein Centralkörper vorhanden ist, sondern die continuirliche Verbindungslinie der Schwerpuncte aller Schnitte des Umkreises, welche durch Ebenen erzeugt werden, die durch den rad. vector r und die x-Axe oder die Drehungsaxe gelegt sind, ist ein ebener Kreis.

Daraus folgt denn weiter, dass $\sin \omega = 1$ sein muss und (75) reducirt sich auf die folgende

$$\frac{\dfrac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} + V}{\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} - 3V} = 1 + \lambda^2 \qquad (77)$$

und wenn man den Werth von $\sqrt{1+\lambda^2}$ nämlich $\frac{c}{a}$ gleich p setzt

$$3Vp^3 - (2-3V)p^2 + (2+V)p + V = 0 \qquad (78)$$

Durch die Wurzeln dieser Gleichung wird die Ellipticität der erzeugenden Ellipse jedesmal bestimmt, sobald V bekannt ist. Der Werth von V hat auch für das Bestehen des Gleichgewichts eine Grenze, welche Laplace zu 0,108605 berechnet hat; es kann daher nur innerhalb der Grenzen $V' = 0{,}108605$ und $V^0 = 0$ das Flüssige die Ringform annehmen. In dem ersteren Falle ist $p = 2{,}591$ und zwischen V' und V^0 hat p stets zwei positive Werthe, da die Gleichung zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge hat; für $V = 0$ endlich hat p drei positive Werthe

$$p^0 = 0; \quad p' = 1; \quad p'' = \infty.$$

d. h. der Ring geht über in eine Lamelle, entsprechend der am Schlusse von § 6 unter Nro. V aufgeführten Figur der unendlichen Lamelle, oder seine erzeugende Figur ist ein Kreis, oder auch der Ring eine Lamelle, die um 90° gegen die erstere gewälzt erscheint.

Nimmt man nicht die Existenz einer Centralkraft an, so liefert (73) die Gleichung

$$rV = 0 \text{ oder } V = 0$$

und wenn man in (75) $\sin\omega \sqrt{1+\lambda^2}$ gleich P setzt, so hat in diesem Falle, da $\sin\omega$ stets einen endlichen Werth haben muss, die Gleichung die drei Wurzeln $P^0 = 0$, $P' = 1$, $P'' = \infty$, während $Pa = c \sin\omega$ ist.

Hieraus geht hervor, dass der normale Querschnitt eine Gerade oder ein Kreis sein müsse. Weil nämlich der radius vector mit dem Normal- oder Querschnitte einen Winkel $\frac{\pi}{2} - \omega$ macht, so ist seine eine Axe 2a, die andere 2c' oder $2c \cos(\frac{\pi}{2} - \omega)$ oder 2aP; ist also

$P = 0$, so ist $a = a$ und $c' = 0$ (Gerade)

$P = 1$, $\quad a = a$ und $c' = a$ (Kreis)

$P = \infty$, $\quad a = a$ und $c' = \infty$ (Gerade $\frac{\pi}{2}$)

Es geht zugleich aus dem Vorhergehenden hervor, dass das Gleichgewicht von r und ω unabhängig ist, so lange $\omega > 0$, dass also der Umkreis jede beliebige Figur der Ebene oder des Raumes annehmen könne, die discontinuirliche selbstverständlich ausgenommen.

Laplace scheint der Ansicht zu sein, dass diese Theorie noch dann ihre Gültigkeit behalte, wenn die erzeugende Ellipse ihre Grösse im ganzen Umkreis des Ringes ändere, dessen Theile

so ungleich breit werden.*) Er fügt hinzu, dass diese Ungleichheit nothwendig sei, um die Saturnringe im Gleichgewichte um ihren Centralkörper zu erhalten. Er beweist, dass ein Ring, dessen Theile einander vollkommen ähnlich seien, sich im labilen Gleichgewichte befinde, dass der Mittelpunct desselben vom Mittelpuncte des Centralkörpers abgestossen werden müsse, wenn beide nur einen Moment aufhörten zusammenzufallen und dass der Ring im Verlaufe einer spiralförmigen Bewegung seines Schwerpunctes um den des Saturn sich endlich mit diesem vereinigen müsse. Hiergegen lässt sich keine Einwendung machen. Allein untersuchen wir schliesslich einmal, ob eine solche irreguläre Gestalt mit der vorhergehenden Theorie wirklich vereinbar sei, wenn wir bei den von uns mit Laplace gemachten Voraussetzungen beharren.

Die Durchschnittsfigur des Ringes und der (xz) Ebene besteht aus zwei concentrischen Curven, deren radii vectores im Allgemeinen die Werthe $r - c$ und $r + c$ haben, worin r als constant, c als variabel betrachtet werden mag. In diesem Längenschnitt kommen die Niveaulinien zum Vorschein. Bezeichnen wir nun die Componenten der Anziehung geschätzt nach den Richtungen der radii vectores zweier verschiedener Puncte einer und derselben Niveaulinie mit R und R′, so muss nach (4) oder (8) die Beziehung

$$\varrho R \delta c = \varrho R' \delta c' = - \delta p$$

stattfinden, wo c und c′ die Halbaxen der zu den beiden Puncten gehörigen Schnitte des Ringes bedeuten. Denken wir uns den Ring in n Niveauflächen getheilt, so ist

$$\delta c = \frac{c}{n} \text{ und } \delta c' = \frac{c'}{n}$$

mithin

$$c : c' = \delta c : \delta c' \tag{79}$$

*) Méc. cél liv. III prop. 46.

Wäre nun $c' > c$, also auch $\delta c' > \delta c$, so liesse sich das Gleichgewicht nur mit der Ungleichung $R' < R$ vereinbaren. Es ist aber

$$R = \left(\frac{dV}{dz}\right)_c \text{ und } R' = \left(\frac{dV}{dz}\right)_{c'} \qquad (80)$$

und nach (71) und (72)

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = -\left(\frac{4\pi f\varrho}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{2fM}{r^3} - V\right)z \qquad (81)$$

Substituirt man (81) in (80), indem man einmal $z = c$, das andere Mal $z = c'$ setzt, so geht aus beiden für jeden Punct des Aequators die Verhältnissgleichung hervor

$$R : R' = c : c'$$

oder in Verbindung mit (79) die Productengleichung

$$R\delta c' = R'\delta c.$$

Diese Gleichung bleibt mit der aus (4) und (8) abgeleiteten

$$R\delta c = R'\delta c'$$

unvereinbar, so lange nicht R gleich R' und δc gleich $\delta c'$, also $c = c'$ ist. Dieselbe Eigenschaft lässt sich nun auch auf die andere Halbaxe a übertragen; sie muss in der ganzen Ausdehnung des Ringes eine constante Länge haben. Dies scheint also mit der Laplace'schen Theorie im Widerspruche zu stehen. Dasselbe würde ebenfalls von einem ruhenden unendlich dünnen planetarischen Ringe gelten, und wenn wir alles Vorhergehende zusammenfassen, so können wir sagen:

Erstens: die Grösse der Dichtigkeiten des Ringes wie des Centralkörpers, seine Umwälzungszeit und die Masse des Centralkörpers bestimmen die Grösse r oder die Grösse der Fntfernung des Ringes von seinem Mittelpuncte; sie muss eine constante sein.

Zweitens: der Mittelpunct muss stets mit dem des Centralkörpers coincidiren.

Drittens: die erzeugende Figur des Ringes ist ausschliesslich eine Ellipse, und es gibt jedesmal zwei elliptische Querschnitte, welche dem Gleichgewichte genügen.

Viertens: der Werth V hat ein Maximum, nämlich 0,108605, wobei nur eine Gleichgewichtsfigur möglich ist, das nahe für $\sqrt{1+\lambda^2} = 2{,}594$ stattfindet.

Fünftens: das Gleichgewicht des als flüssig gedachten Ringes erfordert endlich, dass seine Theile einander ähnlich und congruent seien.

Wenn die vorhergehende Theorie auch nur als eine Annäherung in Bezug auf die physischen Ringe zu betrachten ist, so gewährt sie doch als ein Fundamentalsatz für die allgemeinen Untersuchungen des Gleichgewichts uud der Oberflächengestalt freier Flüssigkeiten einen grossen Nutzen, sobald dieselben in ihrer Gestaltung von der sphäroidischen auf die oben beschriebene Weise abweichen.

Berichtigungen:

Seite 5 Zeile 6 von unten lies (1788) statt (1778).
„ 13 „ 12 von oben lies unendlichen Cylinder statt Ring.
„ 32 „ 4 von unten lies rxz statt rxy.
„ 48 „ 5 v. oben lies $\frac{x^2}{a^4}$ statt $\frac{x^2}{x^4}$

In Fig. 3 sollten PT und P′T′ normal gegen αT und βT′ gerichtet sein.
Seite 62 Z. 2 von unten streiche (Siehe d. Anhang).

Druck von C. F. Mohr in Kiel.

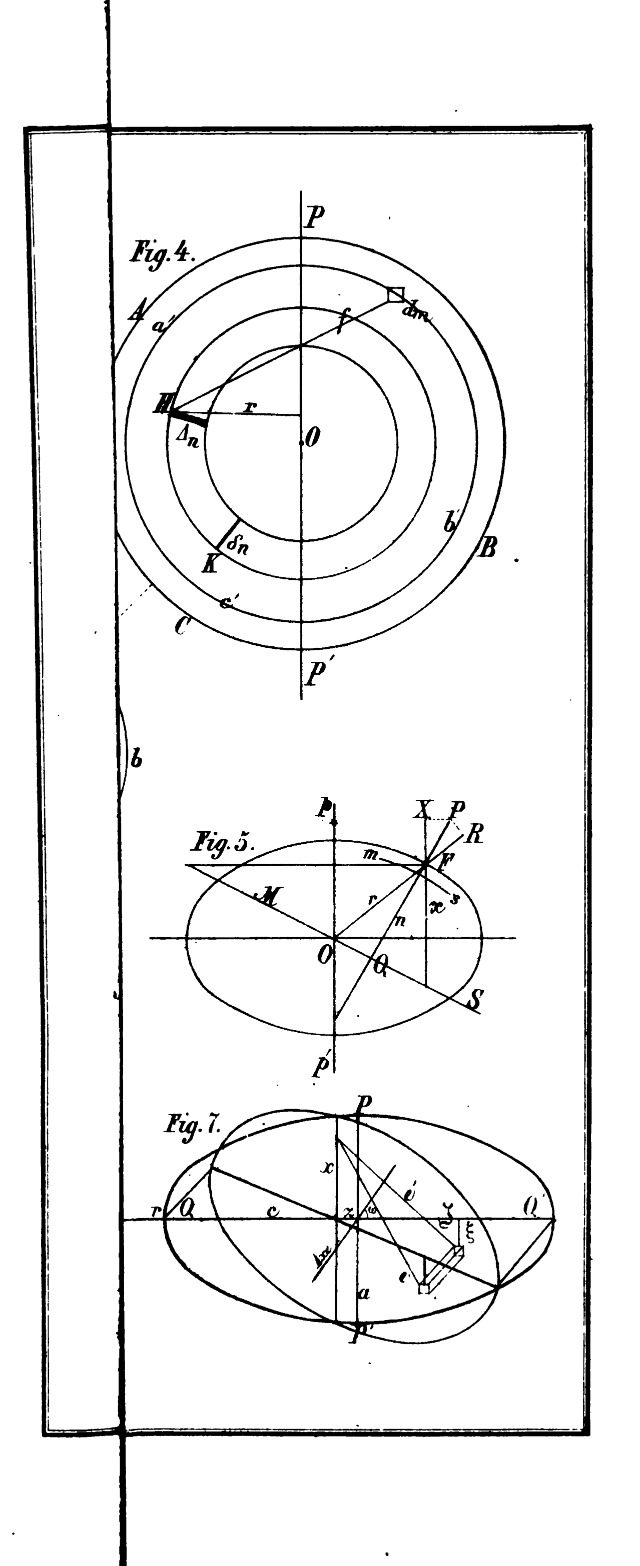


Fig. 4.
P
A
a'
dm
f
H
r
O
K
b'
B
c'
C
P'
b
Fig. 5.
X
R
m
F
M
r
x
s
n
O
Q
S
P'
Fig. 7.
P
x
v'
r
Q
c
z
ω
ζ
Q'
ξ
a
P'

Der

Attractionscalcül.

Eine Monographie

von

Dr. Oskar Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der Königl. Sächs. technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mit einer Figurentafel.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1851.

Einleitung.

Die Berechnung der Anziehung, welche ein materieller Punkt von einer irgendwie gestalteten Masse erleidet, gehört zu den Problemen, die sich einer besonderen Aufmerksamkeit von Seiten der Analytiker zu erfreuen haben; namentlich ist es die Anziehung der Sphäroide, mit deren Ermittelung die grössten Mathematiker — wir nennen nur *Lagrange*, *Laplace*, *Ivory*, *Poisson*, *Gauss*, *Jacobi* und *Lejeune Dirichlet* — beschäftigt gewesen sind, theils wegen der analytischen Schwierigkeiten, die sie darbietet, theils wegen ihres Zusammenhanges mit den Untersuchungen über die Gestalt der Erde und über die Schwere an deren Oberfläche. Wenn wir nun dieses oft behandelte Thema des Attractionscalcüls hier wiederum vornehmen, so geschieht dies aus einem doppelten Grunde; einmal, um die wesentlichsten Resultate der bisherigen Arbeiten übersichtlich zusammenzustellen, besonders aber, um ein neues Moment in diese Untersuchungen einzuführen. Man hat sich nämlich fast durchaus nur mit dem sehr einfachen Falle beschäftigt, in welchem die anziehende Masse als eine homogene betrachtet wird, und obwohl man sich gestehen musste, dass diese Voraussetzung gewiss nur äusserst selten in der Natur erfüllt sein wird, so findet sich gleichwohl kein tiefer eingehender Versuch zur Berechnung der Anziehung, welche ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit ausübt. Vielleicht, dass man sich durch die Schwierigkeiten hat abschrecken lassen, die schon bei homogenen Körpern den Calcül umgeben und von denen allerdings eine Wiederholung in grösserem Maasse zu fürchten war, wenn man das Problem verallgemeinern

wollte. Dass aber diese Schwierigkeiten keine unübersteiglichen sind und dass ihre Besiegung zu sehr eleganten Resultaten führen kann (m. s. z. B. die neuen Formeln über das dreiachsige Ellipsoid mit variabler Dichtigkeit und das darauf bezügliche merkwürdige Reduktionstheorem in §. 10), das werden die nachfolgenden Blätter wohl beweisen.

---

§. 1.

Allgemeine Begriffe und Formeln.

Wenn es überhaupt eine Kraft giebt, welche sich von einem Massenpartikel, als ihrem Sitze, aus allseitig strahlenförmig durch den Raum verbreitet — und man ist in der That gezwungen, die Existenz solcher Kräfte vorauszusetzen —, so kann die Wirkung derselben auf ein anderes Massentheilchen nur von der Grösse der beiden Massen und ihrer Entfernung, nicht aber von der Richtung der letzteren abhängig sein, weil es im Raume keine bevorzugten Richtungen, kein absolutes Oben oder Unten giebt. Daraus folgt sogleich, dass alle in gleicher Entfernung um das erste Massenpartikel herumliegenden materiellen Punkte eine gleiche Einwirkung erleiden, oder, was Dasselbe ist, dass alle Punkte einer um jenes Massenpartikel beschriebenen Kugelfläche eine gleiche Beschleunigung erhalten. Construiren wir eine zweite grössere concentrische Kugelfläche, so vertheilt sich dieselbe Wirkung, welche auf die erste Fläche fiel, nunmehr auf die zweite und die Intensität (man könnte fast sagen: Dichtigkeit) der Wirkung wird an einer bestimmten Stelle der zweiten Fläche soviel mal kleiner sein, als die zweite Fläche die erste an Grösse übertrifft. Da nun concentrische Kugelflächen wie die Quadrate der Halbmesser zunehmen, so muss die Einwirkung des im Mittelpunkte befindlichen Massenpartikels in eben demselben Maasse abnehmen; eine allseitig in die Ferne wirkende Kraft können wir uns daher nicht wohl anders, als nach umgekehrtem quadratischen Verhältniss wirkend vorstellen, dagegen würde das einfache umgekehrte Verhältniss auf solche Kräfte passen, welche nach einer einzigen absoluten Richtung im Raum wirken sollten. Um noch die Massen mit in Rechnung zu ziehen, genügt die be-

kannte Regel, dass sich bewegende Kräfte direkt wie die Massen verhalten; die Einwirkung eines ponderabelen Moleküles μ auf ein anderes μ', welches sich in der Entfernung u befindet, wird demnach durch $\frac{\mu\mu'}{u^2}$ ausgedrückt, und die Einheit dieser Kraft ist hier diejenige Kraft, mit welcher die Masseneinheit auf eine um die Längeneinheit entfernte gleiche Masse wirkt. Was die Richtung dieser Kraft anbelangt, so fällt diese, wenigstens bei der Gravitation und den magnetischen Flüssigkeiten, mit der Richtung von u zusammen, und die bewegende Kraft strebt die Entfernung u entweder zu verringern oder zu vergrössern. Bleiben wir beim ersten Falle stehen, so haben wir die gewöhnliche Anziehung, wie z. B. die Gravitation, und auf diese beziehen sich die folgenden Formeln.

Bezeichnen wir mit dV das Element einer irgendwie gestalteten materiellen Linie, einer Fläche, oder eines Körpers und mit Θ die Dichtigkeit dieses Elementes, so ist $\Theta\, dV$ die Masse desselben und diese übt auf einen in der Entfernung u befindlichen Punkt, dem wir der Einfachheit wegen die Masse Eins zuschreiben, die Anziehung

$$1)\qquad \frac{\Theta\, dV}{u^2}.$$

Bezeichnen wir ferner mit x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des anziehenden Elementes und mit α, β, γ die des angezogenen Punktes, wo nun

$$2)\qquad u = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}$$

ist, so können wir jene Elementaranziehung in drei Componenten parallel den Coordinatenaxen zerlegen, indem wir $\frac{\Theta\, dV}{u^2}$ mit dem Cosinus derjenigen Winkel multipliziren, welche u mit den drei Coordinatenachsen einschliesst; diese drei Winkel mögen (u, x), (u, y), (u, z) heissen und dann sind die Componenten der Elementaranziehung

$$3)\qquad \frac{\Theta\, dV}{u^2} \cos(u, x),\quad \frac{\Theta\, dV}{u^2} \cos(u, y),\quad \frac{\Theta\, dV}{u^2} \cos(u, z).$$

Hieraus ergeben sich durch Integration die Componenten der Gesammtanziehung der Masse und zwar ist die Integration eine einfache, doppelte oder dreifache, je nachdem die Masse auf einer Linie, einer Fläche oder in einem Körper vertheilt ist, wobei der Ausdruck Masse nichts weiter

als Dasjenige bedeutet, wovon die Anziehung ausgehend gedacht wird; im ersten Falle tritt an die Stelle von dV das Linienelement ds oder bei rechtwinkligen Coordinaten

$$dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

im zweiten Falle das Flächenelement

$$dx\;dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

und im dritten Falle das Volumenelement

$$dV = dx\;dy\;dz. \tag{4}$$

Beschränken wir uns auf den letzten Fall als den einzigen, welcher in der Natur vorkommt, und berücksichtigen wir die bekannten Gleichungen

$$cos(u,x)=\frac{\alpha-x}{u},\quad cos(u,y)=\frac{\beta-y}{u},\quad cos(u,z)=\frac{\gamma-z}{u} \tag{5}$$

so sind jetzt die Componenten A, B, C der Gesammtanziehung

$$\left\{\begin{aligned} A &= \int\!\!\int\!\!\int\frac{\Theta(\alpha-x)}{u^3}\,dx\;dy\;dz \\ B &= \int\!\!\int\!\!\int\frac{\Theta(\beta-y)}{u^3}\,dx\;dy\;dz \\ C &= \int\!\!\int\!\!\int\frac{\Theta(\gamma-z)}{u^3}\,dx\;dy\;dz \end{aligned}\right. \tag{6}$$

oder vermöge des aus No. 2 bekannten Werthes von u

$$\left\{\begin{aligned} A &= \int\!\!\int\!\!\int\frac{\Theta(\alpha-x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} \\ B &= \int\!\!\int\!\!\int\frac{\Theta(\beta-y)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} \\ C &= \int\!\!\int\!\!\int\frac{\Theta(\gamma-z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

wobei die Integrationsgränzen so zu wählen sind, dass nur die im Innern des Körpers liegenden Punkte xyz in Rechnung kommen.

Will man sich statt rechtwinkliger Coordinaten lieber der Polarcoordinaten bedienen, was oft bequemer ist, so bezeichne man den Radius-

vector des Punktes xyz mit ϱ, den Winkel zwischen ϱ und x mit ϑ, endlich den Neigungswinkel, welcher die Ebene des Winkels ϑ mit der Coordinatenebene xy einschliesst, durch ω, so ist *)

$$x = \varrho \cos\vartheta, \quad y = \varrho \sin\vartheta \cos\omega, \quad z = \varrho \sin\vartheta \sin\omega$$

und das Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz = \varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho$, mithin

$$8)\ \begin{cases} A = \int\int\int \dfrac{\Theta(\alpha - \varrho\cos\vartheta)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho}{\sqrt{(\alpha-\varrho\cos\vartheta)^2+(\beta-\varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2+(\gamma-\varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}^3} \\ B = \int\int\int \dfrac{\Theta(\beta - \varrho\sin\vartheta\cos\omega)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho}{\sqrt{(\alpha-\varrho\cos\vartheta)^2+(\beta-\varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2+(\gamma-\varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}^3} \\ C = \int\int\int \dfrac{\Theta(\gamma - \varrho\sin\vartheta\sin\omega)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho}{\sqrt{(\alpha-\varrho\cos\vartheta)^2+(\beta-\varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2+(\gamma-\varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}^3} \end{cases}$$

und diese Formeln vereinfachen sich namentlich dann bedeutend, wenn man den angezogenen Punkt zum Coordinatenanfang wählt, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$ setzt, wie es später einmal geschehen wird.

Die Berechnung der drei Componenten A, B, C lässt sich noch in einer anderen Weise ausführen, bei welcher es nur einer dreifachen Integration bedarf. Aus dem Werthe von u geht nämlich hervor, dass bei partieller Differenziation in Beziehung auf α

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \frac{\alpha - x}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}} = \frac{\alpha - x}{u}$$

mithin

$$-\left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\alpha}\right) = \frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \frac{\alpha - x}{u^3}$$

sein muss. Bezeichnen wir den linker Hand vorkommenden partiellen Differentialquotienten mit $D_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)$, so ist nun nach dem Obigen und durch partielle Differenziation in Beziehung auf β und γ

$$\frac{\alpha - x}{u^3} = -D_\alpha\left(\frac{1}{u}\right), \quad \frac{\beta - y}{u^3} = -D_\beta\left(\frac{1}{u}\right), \quad \frac{\gamma - z}{u^3} = -D_\gamma\left(\frac{1}{u}\right)$$

und demgemäss sind die Werthe von A, B, C nach No. 6)

---

*) s. Note 1.

$$A = -\int\int\int \Theta . D_\alpha \left(\frac{1}{u}\right) dx\ dy\ dz$$

$$B = -\int\int\int \Theta . D_\beta \left(\frac{1}{u}\right) dx\ dy\ dz$$

$$C = -\int\int\int \Theta . D_\gamma \left(\frac{1}{u}\right) dx\ dy\ dz.$$

Versparen wir die auf α, β, γ bezüglichen partiellen Differenziationen bis nach Ausführung der angedeuteten Integrationen, so nehmen A, B, C folgende Formen an:

$$A = -D_\alpha \int\int\int \Theta . \frac{1}{u}\ dx\ dy\ dz$$

$$B = -D_\beta \int\int\int \Theta . \frac{1}{u}\ dx\ dy\ dz$$

$$C = -D_\gamma \int\int\int \Theta . \frac{1}{u}\ dx\ dy\ dz$$

und man erkennt hieraus, dass es nur darauf ankommt, den Werth des dreifachen Integrales

$$\int\int\int \frac{\Theta\ dx\ dy\ dz}{u}$$

zu ermitteln, da die Componenten A, B, C nichts Anderes als die drei in Beziehung auf α, β, γ partiell und negativ genommenen Differentialquotienten desselben sind. Dieses dreifache Integral, die Summe der Massenelemente, dividirt durch ihre jedesmalige Entfernung vom angezogenen Punkte, nennen wir mit *Gauss* das Potential der Anziehung; bei rechtwinkligen Coordinaten ist dasselbe

$$9)\qquad P = \int\int\int \frac{\Theta\ dx\ dy\ dz}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}}$$

bei Polarcoordinaten

$$10)\ P = \int\int\int \frac{\Theta\ \varrho^2 \sin\vartheta\ d\omega\ d\vartheta\ d\varrho}{\sqrt{(\alpha - \varrho\cos\vartheta)^2 + (\beta - \varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2 + (\gamma - \varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}}$$

und für die Componenten A, B, C gelten jetzt die Formeln

$$11)\qquad A = -\left(\frac{dP}{d\alpha}\right),\; B = -\left(\frac{dP}{d\beta}\right),\; C = -\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).$$

Natürlich wird bei dieser Berechnungsweise der Componenten vorausgesetzt, dass die Ermittelung des Potentials für ganz beliebige α, β, γ erfolgt sei, weil eine Differenziation in Beziehung auf spezialisirte α, β, γ nicht möglich sein würde.

§. 2.

Anziehung sehr weit von einander entfernter Massen.

Wenn der Abstand des angezogenen Punktes $\alpha\beta\gamma$ von dem anziehenden Körper sehr gross ist im Verhältniss zu den Dimensionen des letzteren, so lässt sich der im Potenziale vorkommende Faktor

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}}$$

in eine stark convergirende Reihe entwickeln, welche nach Potenzen und Produkten von x, y und z fortschreitet. Bezeichnen wir mit E die Entfernung des angezogenen Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, so ist

$$12)\qquad E^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

und

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{E^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$= \frac{1}{E} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{E^3}$$
$$+ \frac{(3\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)E^2}{2E^5} + \ldots\ldots$$

Vermöge dieser Entwickelung ist nun

$$13)\qquad P = \frac{1}{E}\int\!\!\int\!\!\int \Theta\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \frac{1}{E^3}\Big[\alpha\int\!\!\int\!\!\int \Theta x\, dx\, dy\, dz + \beta\int\!\!\int\!\!\int \Theta\, y\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \gamma\int\!\!\int\!\!\int \Theta z\, dx\, dy\, dz\Big]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei wir die übrigen Glieder wegen ihrer verhältnissmässigen Kleinheit vernachlässigen können, um eine einfache Näherungsformel zu erhalten. Die statische Bedeutung der vier Integrale, welche in dem Werthe von P jetzt noch vorkommen, ist nun sehr leicht zu erkennen. Das erste dreifache Integral giebt die Summe aller Massenelemente, also die Gesammtmasse des anziehenden Körpers, welche wir M nennen wollen; das zweite Integral ist nichts Anderes als die Summe der statischen Momente aller Körperpartikel, bezogen auf die Coordinatenebene yz, also gleich dem Momente der in ihrem Schwerpunkte vereinigten Masse M, und ganz ähnlich ist die Bedeutung des dritten und vierten Integrales; nennen wir daher ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des anziehenden Körpers, so haben wir

$$\int\int\int \Theta x \, dx \, dy \, dz = M\xi$$

$$\int\int\int \Theta y \, dx \, dy \, dz = M\eta$$

$$\int\int\int \Theta z \, dx \, dy \, dz = M\zeta$$

und mithin nach No. 13)

$$14) \qquad P = \frac{M}{E} + \frac{M}{E^3}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

Diese Formel vereinfacht sich bedeutend, wenn man den bisher noch willkührlichen Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt verlegt, also $\xi = \eta = \zeta = 0$ setzt, wodurch

$$15) \qquad P = \frac{M}{E} = \frac{M}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

wird. Durch partielle Differenziationen in Beziehung auf α, β, γ erhält man hieraus

$$A = \frac{M\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^3}, \quad B = \frac{M\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^3}, \quad C = \frac{M\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^3}.$$

Die Resultante R dieser in den Richtungen der drei Coordinatenachsen wirkenden Kräfte bestimmt sich nunmehr nach der bekannten Formel

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und sie ist vermöge der Werthe von A, B, C

16)
$$R = \frac{M}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{M}{E^2}$$

d. h. bei hinlänglich grosser Entfernung des angezogenen Punktes ist die Anziehung, welche er leidet, fast dieselbe, als wenn die Masse des anziehenden Körpers in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre.

§. 3.

Anziehung des abgestumpften Kegels.

Um zunächst einen einfachen Fall zu haben, in welchem sich die drei zur Berechnung der Anziehung erforderlichen Integrationen ohne besondere Kunstgriffe ausführen lassen, betrachten wir die Anziehung, die ein gewöhnlicher abgestumpfter Kegel auf einen Punkt seiner verlängerten Achse ausübt.

Den angezogenen Punkt P (Fig. 2.) nehmen wir zum Anfangspunkte der Coordinaten, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$; von den drei Componenten A, B, C sind dann die beiden letzten $= 0$, weil der anziehende Körper dem angezogenen Punkte in der Weise symmetrisch gegenüberliegt, dass die Seitenanziehungen der Körperelemente sich gegenseitig aufheben. Die Componente A ist daher zugleich die Gesammtanziehung, nämlich

17)
$$A = \int\int\int \frac{\Theta x \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}$$

indem wir auf das Vorzeichen nicht achten, da es nur die Richtung der Anziehung, nicht aber ihre Intensität betrifft. Um die Integrationsgränzen für das obige dreifache Integral zu ermitteln, betrachten wir $PK = x$, $KL = y$, $LM = z$ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Körperelementes M und setzen ferner den grösseren Halbmesser des abgestumpften Kegels $= r$, den kleineren $= \varrho$, die Höhe $= h$ und den Abstand des angezogenen Punktes von der kleineren Kreisfläche $= a$. Hiernach sind die Gränzen für x offenbar

$$x = a \text{ und } x = a + h.$$

Verlängern wir $KL = y$, bis diese Gerade die Kegelfläche in zwei Punkten L' und L'' schneidet (die Figur giebt nur den vorderen Punkt L'), so sind $y = KL''$ bis $y = KL'$ die Gränzen für y; nun findet man ohne Mühe

$$18)\qquad KL' = \varrho + (x-a)\,\frac{r-\varrho}{h} = p$$

wo p nur zur Abkürzung dienen soll, und es sind daher

$$y = -p \text{ bis } y = +p$$

die Gränzen für y. Verlängern wir endlich $LM = z$ bis diese Gerade die Kegelfläche in zwei Punkten M' und M'' schneidet (die Figur zeigt nur den oberen Punkt M'), so sind $z = LM''$ bis $z = LM'$ die Gränzen für z; man hat aber

$$LM' = \sqrt{(\overline{KM'}^2 - \overline{KL}^2)} = \sqrt{(\overline{KL'}^2 - \overline{KL}^2)}$$

$$19)\qquad = \sqrt{p^2 - y^2} = q$$

wo q ein Abkürzungszeichen ist, und mithin für z die Gränzen

$$z = -q \text{ bis } z = +q.$$

Nach diesen Erörterungen gestaltet sich die Formel 17) wie folgt:

$$A = \int_a^{a+h} x\,dx \int_{-p}^{+p} dy \int_{-q}^{+q} \frac{\Theta\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

wo nun über die Dichtigkeit Θ noch eine Bestimmung zu treffen ist. Denken wir uns den abgestumpften Kegel, bestehend aus einer stetigen Folge von Schichten, senkrecht auf der Axe der x, und zwar in der Weise, dass jede Schicht für sich homogen ist und erst von Schicht zu Schicht die Dichtigkeit wechselt, so hängt Θ nur von x ab und kann demnach als eine willkührliche Funktion von x, etwa als $f(x)$ bezeichnet werden. Die vollständig bestimmte Formel für A ist jetzt

$$20)\qquad A = \int_a^{a+h} x f(x)\,dx \int_{-p}^{+p} dy \int_{-q}^{+q} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

und hier können die zwei auf z und y bezüglichen Integrationen sehr leicht ausgeführt werden.

Vermöge der bekannten Formel

$$\int \frac{dz}{\sqrt{k+z^2}^3} = \frac{z}{k\sqrt{k+z^2}}$$

findet man sogleich für $k = x^2 + y^2$ und nachher vermöge des Werthes von q

$$\int_{-q}^{+q} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \frac{2q}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+q^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{p^2-y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{p^2+x^2}}$$

folglich, weil p kein y enthält und daher für die nächste Integration als Constante gilt,

$$21) \qquad A = 2\int_a^{a+h} \frac{x f(x)\, dx}{\sqrt{p^2+x^2}} \int_{-p}^{+p} dy\, \frac{\sqrt{p^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

Die auf y bezügliche Integration ist leicht zu bewerkstelligen, wenn man eine neue Variable t durch die Substitution $y = p \sin t$ einführt, in Beziehung auf welche die Gränzen $t = +\frac{1}{2}\pi$ und $t = -\frac{1}{2}\pi$ den früheren Gränzen $y = +p$ und $y = -p$ entsprechen; man hat dann

$$\int_{-p}^{+p} dy\, \frac{\sqrt{p^2-y^2}}{x^2+y^2} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{p^2 \cos^2 t\, dt}{x^2+p^2 \sin^2 t}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \left\{ \frac{p^2+x^2}{x^2+p^2 \sin^2 t} - 1 \right\} dt = (p^2+x^2) \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{dt}{x^2+p^2 \sin^2 t} - \pi$$

Nach einer bekannten Formel ist aber

$$\int \frac{dt}{x^2+p^2 \sin^2 t} = \int \frac{dt}{x^2 \cos^2 t + (p^2+x^2) \sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{p^2+x^2}} \, Arctan \left(\frac{\sqrt{p^2+x^2}}{x} \tan t \right)$$

und wenn man diess für das Vorhergehende benutzt, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\int_{-p}^{+p} dy\, \frac{\sqrt{p^2-y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{p^2+x^2}}{x} \pi - \pi$$

und durch Substitution in die unter No. 21. verzeichnete Formel

$$A = 2\pi \int_a^{a+h} f(x)\, dx \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}} \right\}$$

oder endlich vermöge des in No. 18. verzeichneten Werthes von p

$$22)\qquad A=2\pi\int_a^{a+h}\left[1-\frac{hx}{\sqrt{h^2x^2+[h\varrho+(r-\varrho)(x-a)]^2}}\right]f(x)\,dx$$

womit die Aufgabe in so fern gelöst ist, als eine einfache Integration jederzeit, sei es genau oder durch Näherung, ausgeführt werden kann.

Für den speziellen Fall $\varrho=r$ erhält man die Anziehung des Cylinders mit dem Halbmesser r und der Höhe h, nämlich

$$23)\qquad A=2\pi\int_a^{a+h}\left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right\}f(x)\,dx$$

für $\varrho=0$ dagegen die Anziehung eines Kegels von denselben Dimensionen, nämlich

$$24)\qquad A=2\pi\int_a^{a+h}\left\{1-\frac{hx}{\sqrt{h^2x^2+r^2(x-a)^2}}\right\}f(x)\,dx.$$

Bemerkenswerth ist der Umstand, dass es viele Formen von $f(x)$ giebt, für welche die Anziehung eines unendlich langen Cylinders oder Kegels immer noch eine endliche Grösse bleibt; so ergiebt sich z. B. aus No. 23. für eine constante Dichtigkeit, etwa $f(x)=k$,

$$A=2k\pi\left\{h-\sqrt{(a+h)^2+r^2}+\sqrt{a^2+r^2}\right\}$$

d. i. für $a+h>r$ durch Verwandlung in eine unendliche Reihe

$$A=2k\pi\left\{-a-\tfrac{1}{2}\,\frac{r^2}{a+h}+\tfrac{1}{8}\,\frac{r^4}{(a+h)^3}-\ldots+\sqrt{a^2+r^2}\right\}$$

woraus bei unendlich wachsenden h folgt:

$$A=2k\pi\left\{\sqrt{a^2+r^2}-a\right\}$$

auch selbst in der Berührung, d. h. für $a=0$, würde die Anziehung hier noch endlich $=2k\pi r$ sein. Aehnliche Fälle lassen sich beliebig viele angeben.

§. 4.

Anziehung der Kugel und Kugelschaale.

Den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen wir in den Mittelpunkt der Kugel und für die Axe der x nehmen wir diejenige Gerade, welche

den Mittelpunkt der Kugel mit dem angezogenen Punkte verbindet; die Coordinaten des letzteren sind dann α und $\beta = \gamma = 0$. Bei dieser Lage heben sich alle Seitenanziehungen, welche der angezogene Punkt erleidet, gegenseitig auf, die Componenten B und C verschwinden und die Componente A stellt die Anziehung selbst in ihrer Totalität dar. Benutzen wir Polarcoordinaten und berechnen A mittelst des Potentiales, so ist wegen $\beta = \gamma = 0$ nach Formel 10)

$$P = \int\int\int \frac{\Theta \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}}$$

worin noch die Integrationsgränzen zu bestimmen wären. Für ϱ sind dieselben $\varrho = 0$ und $\varrho = r$, wo r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, dem ϑ steht der Spielraum $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ offen und ω erstreckt sich von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$. Um über die Dichtigkeit Θ eine Bestimmung zu treffen, wollen wir annehmen, dass die Kugel aus einer stetigen Folge concentrischer kugelförmiger Schichten bestehe, von denen jede für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von einer Schicht zur anderen wechselt. Unter dieser Voraussetzung ist Θ eine Funktion von ϱ allein etwa $= f(\varrho)$ und mithin

$$P = \int_0^r \varrho^2 f(\varrho) \, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} \int_0^{2\pi} d\omega$$

oder durch Ausführung der auf ω bezüglichen Integration

$$25) \qquad P = 2\pi \int_0^r \varrho^2 f(\varrho) \, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}}.$$

Bei unbestimmter Integration ist nun weiter

$$\int \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}}{\alpha\varrho} + Const$$

folglich durch Einführung der Gränzen $\vartheta = \pi$ und $\vartheta = 0$

$$26) \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\varrho + \varrho^2} - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho + \varrho^2}}{\alpha\varrho}.$$

Um nun entscheiden zu können, ob man in dem Subtrahenden rechter Hand $\alpha - \varrho$ oder $\varrho - \alpha$ für die Wurzelgrösse zu setzen habe, muss

man erst wissen, ob α grösser oder kleiner als ϱ ist, d. h. man muss die Fälle unterscheiden, wo der angezogene Punkt ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt.

Im ersten Falle ist $\alpha > r$, also um so mehr $> \varrho$, weil ϱ höchstens $= r$ werden kann und mithin

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} = \frac{\alpha + \varrho - (\alpha - \varrho)}{\alpha\varrho} = \frac{2}{\alpha}$$

Durch Substitution dieses Werthes wird

27) $$P = \frac{4\pi}{\alpha} \int_0^r \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho.$$

Diess lässt sich leicht einfacher ausdrücken. Die Masse M der Kugel würde nämlich sein

$$M = \int_0^r \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int^{2\pi} d\omega = 4\pi \int_0^r \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho$$

und also wird jetzt aus No. 27.

$$P = \frac{M}{\alpha}$$

mithin die Gleichung $A = -D_\alpha P$ oder

28) $$A = \frac{M}{\alpha^2}$$

d. h. die Anziehung einer aus concentrischen Schichten von verschiedener Dichtigkeit zusammengesetzten Kugel geschieht auf einen aussenliegenden Punkt ebenso, als wenn die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Liegt dagegen der angezogene Punkt im Innern der anziehenden Masse selbst, ist also $\alpha < r$, so giebt es theils solche ϱ, welche $< \alpha$, theils solche, die $> \alpha$ sind. Um diese verschiedenen ϱ zu trennen, zerlegen wir in No. 25. die von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r$ erstreckte Integration in zwei andere von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \alpha$ und von $\varrho = \alpha$ bis $\varrho = r$ gehende Ingrationen; dann ist

$$P = 2\pi \int_0^\alpha \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}}$$

$$+ 2\pi \int_\alpha^r \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}}$$

Im ersten Doppelintegrale ist nun $\varrho < \alpha$ und wir setzen daher

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} = \frac{\alpha + \varrho - (\alpha - \varrho)}{\alpha\varrho} = \frac{2}{\alpha}$$

im zweiten Integrale dagegen ist $\varrho > \alpha$ und daher

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} = \frac{\varrho + \alpha - (\varrho - \alpha)}{\alpha\varrho} = \frac{2}{\varrho}$$

Vermöge dieser Substitutionen erhält jetzt P den Werth

$$P = \frac{4\pi}{\alpha} \int_0^\alpha \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho + 4\pi \int_\alpha^r \varrho f(\varrho)\, d\varrho.$$

Um hieraus die Anziehung A abzuleiten, bedarf es nur der Erinnerung an die bekannten Sätze *)

$$D_\alpha \int_a^\alpha \psi(\varrho)\, d\varrho = \psi(\alpha)$$

$$D_\alpha \int_\alpha^b \psi(\varrho)\, d\varrho = -\psi(\alpha)$$

und man findet dann ohne Schwierigkeit:

29) $$A = \frac{4\pi}{\alpha^2} \int_0^\alpha \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho$$

Unter der Rücksicht, dass hier der Faktor von $\frac{1}{\alpha^2}$ die Masse einer mit dem Halbmesser α beschriebenen Kugel bezeichnet, ergiebt sich hieraus das Theorem:

---

*) s. Note II.

Ein im Innern der Kugel liegender, um α von deren Mittelpunkte entfernter Punkt erleidet dieselbe Anziehung, als wenn nur eine mit dem Halbmesser α beschriebene Kugel vorhanden und die Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Bei einer homogenen Kugel, also etwa $f(\varrho) = k$, ist demnach für einen äussern Punkt

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k\,\frac{r^3}{\alpha^2} \qquad , \quad \alpha > r$$

und für einen innenliegenden

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k\,\frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \tfrac{4}{3}\pi k\alpha \qquad , \quad \alpha < r$$

mithin im letzteren Falle die Anziehung direkt proportional der Entfernung des Punktes vom Centrum. Für einen auf der Oberfläche der Kugel liegenden Punkt, d. h. für $\alpha = r$, vereinigen sich beide Formeln zu dem Werthe $\tfrac{4}{3}\pi k r$.

Um die Anziehung einer aus den Halbmessern r_1 und r_2 beschriebenen Kugelschaale zu bestimmen, braucht man dieselbe nur als die Differenz zweier Kugeln anzusehen, von denen die erste mit dem grösseren Halbmesser r_1 und die zweite mit dem kleineren Halbmesser r_2 beschrieben ist. Nennen wir M_1 die Masse der ersten und M_2 die Masse der zweiten Kugel, A_1 die Anziehung der ersten und A_2 die der zweiten, so haben wir für die Anziehung A der Kugelschaale

$$A = A_1 - A_2 = \frac{M_1}{\alpha^2} - \frac{M_2}{\alpha^2} = \frac{M_1 - M_2}{\alpha^2} = \frac{M}{\alpha^2}$$

wo M die Masse der Kugelschaale bedeutet und vorausgesetzt wird, dass $\alpha > r_1$, also auch $> r_2$ sei. Liegt zweitens der angezogene Punkt in der anziehenden Schaale selbst, ist also $r_2 > \alpha > r_2$, so befindet er sich innerhalb der grösseren, aber ausserhalb der kleineren Kugel, und demnach ist

$$A = \frac{m}{\alpha^2} - \frac{M_2}{\alpha^2} = \frac{m - M_2}{\alpha^2}$$

wobei m die Masse einer mit dem Halbmesser α beschriebenen Kugel bezeichnet; ist endlich $r_1 > r_2 > \alpha$, so liegt der angezogene Punkt

innerhalb der von der Kugelschaale umschlossenen Hohlkugel, also innerhalb M_2 sowohl als M_1, und es ist dann

$$A = \frac{m}{\alpha^2} - \frac{m}{\alpha^2} = 0$$

d. h. der Punkt erleidet gar keine Anziehung, wovon man sich übrigens auch leicht durch eine einfache Betrachtung fast ohne alle Rechnung überzeugen kann.

§. 5.

Anziehung des homogenen dreiachsigen Ellipsoides.

Den angezogenen Punkt nehmen wir zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und die Coordinatenachsen legen wir parallel den drei Halbachsen des Ellipsoides, welche letztere a, b und c heissen mögen; die drei Componenten der Anziehung sind in diesem Falle laut Nr. 8) und ohne weitere Rücksicht auf die Vorzeichen

$$30)\quad \begin{cases} A = \int\!\!\int\!\!\int \Theta \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho \\ B = \int\!\!\int\!\!\int \Theta \cos\omega \sin^2\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho \\ C = \int\!\!\int\!\!\int \Theta \sin\omega \sin^2\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho \end{cases}$$

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung von A, weil bei der symmetrischen Lage des Coordinatensystemes in Beziehung auf a, b, c die Entwickelung von B, C im Wesentlichen dieselbe und nur in der Bezeichnung verschieden sein würde, so dass man B und C auch leichter durch Buchstabenvertauschung erhalten kann. Die Dichtigkeit Θ sei constant, wesshalb man einfacher

$$31)\quad A = \Theta \int\!\!\int\!\!\int \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho$$

schreiben darf. Um nun die Integrationsgränzen für ϱ, ϑ und ω zu bestimmen, dienen folgende Bemerkungen: Verlängert man den Radiusvector $PM = \varrho$ hinreichend, so durchschneidet er die Oberfläche des Ellipsoides in zwei Punkten M_1 und M_2 (Fig. 3 giebt einen blossen Durchschnitt); diese Punkte liegen auf derselben Seite der Geraden PM, wenn der angezogene Punkt P sich ausserhalb des Ellipsoides befindet, dage-

gen liegen sie auf entgegengesetzten Seiten von P aus, wenn P in die anziehende Masse selbst fällt. Nennen wir in jedem Falle r_1 und r_2 die absoluten Längen von PM_1 und PM_2, so sind die Integrationsgränzen in Beziehung auf ϱ

$\varrho = r_2$ bis $\varrho = r_1$ für einen äusseren Punkt P,

$\varrho = -r_2$ bis $\varrho = r_1$ für einen inneren Punkt P.

Die Grössen r_1 und r_2 bestimmen sich leicht, weil M_1 und M_2 Punkte auf der Oberfläche des Ellipsoides sind. Nennen wir r, ϑ, ω die polaren Coordinaten eines solchen Punktes in Beziehung auf das bisherige Coordinatensystem, x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes in Beziehung auf die drei Halbaxen des Ellipsoides als Coordinatenachsen, endlich α, β, γ die ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes des Ellipsoides, so finden die Gleichungen

$$x = r\cos\vartheta - \alpha$$
$$y = r\sin\vartheta\cos\omega - \beta$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\omega - \gamma$$

statt und wenn man diese in die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides, nämlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

substituirt, so erhält man eine quadratische Gleichung von der Form

$$32)\qquad Nr^2 - 2Ur = V,$$

worin zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$33)\qquad N = \left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\sin\omega}{c}\right)^2$$

$$34)\qquad U = \frac{\alpha\cos\vartheta}{a^2} + \frac{\beta\sin\vartheta\cos\omega}{b^2} + \frac{\gamma\sin\vartheta\sin\omega}{c^2}$$

$$35)\qquad V = 1 - \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2$$

Die Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung, nämlich

$$\frac{U + \sqrt{U^2 + NV}}{N} \text{ und } \frac{U - \sqrt{U^2 + NV}}{N}$$

sind nun unmittelbar die Werthe von r_1 und r_2. Was noch die Integrationsgränzen für ϑ und ω anbelangt, so gestalten sich diese sehr einfach; für ϑ gelten nämlich die Gränzen $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und für ω die Werthe

$\omega = 0$ bis $\omega = \pi$, wie man unmittelbar erkennen wird. Nach alle diesen Bemerkungen ist nun für einen ausserhalb liegenden Punkt P

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{r_2}^{r_1} d\varrho$$

für einen im Ellipsoid selbst liegenden Punkt ist dagegen

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{-r_2}^{r_1} d\varrho.$$

Die in Beziehung auf ϱ angedeutete Integration lässt sich unmittelbar ausführen und giebt im ersten Falle

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, [r_1 - r_2]$$

$$= \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \frac{2\sqrt{U^2 + NV}}{N}$$

und im zweiten Falle

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta [r_1 + r_2]$$

$$= \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, \frac{2U}{N}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Berechnung der Anziehung eines Ellipsoides im zweiten Falle bei weitem einfacher ist als im ersten, wo man es unter dem Integralzeichen mit einer sehr verwickelten Wurzelgrösse zu thun bekommen würde; wir beschränken uns daher auf den Fall eines im Innern liegenden Punktes. Vermöge des Werthes von U ist dann

$$36) \quad A = \frac{2\alpha\Theta}{a^2} \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{N}$$
$$+ \frac{2\beta\Theta}{b^2} \int_0^\pi \cos\omega \, d\omega \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta}{N}$$
$$+ \frac{2\gamma\Theta}{c^2} \int_0^\pi \sin\omega \, d\omega \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta}{N}.$$

Die drei auf ϑ bezüglichen Integrale stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$\int_0^\pi f(\vartheta)\, d\vartheta;$$

zerlegte man dieses in die beiden folgenden

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta$$

und setzt im ersten $\vartheta = \vartheta'$, dagegen im zweiten $\vartheta = \pi - \vartheta'$, so wird

$$\int_0^\pi f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta')\, d\vartheta' - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} f(\pi - \vartheta')\, d\vartheta'$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta')\, d\vartheta' + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\pi - \vartheta')\, d\vartheta'$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ f(\vartheta') + f(\pi - \vartheta') \right\} d\vartheta'.$$

Bleibt nun die Funktion $f(\vartheta')$ im zweiten Quadranten dieselbe wie im ersten, d. h. besitzt sie die Eigenschaft $f(\vartheta') = f(\pi - \vartheta')$, so hat man nach dem Obigen

$$\int_0^\pi f(\vartheta)\, d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta$$

ist dagegen $f(\vartheta') = -f(\pi - \vartheta')$, so verschwindet das zwischen den Gränzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ genommene Integral von $f(\vartheta)\, d\vartheta$. Nun besitzt aber der Ausdruck

$$f(\vartheta) = \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{N}$$

die erste Eigenschaft $f(\vartheta') = f(\pi - \vartheta')$ und daher kann man im ersten Integrale der Gleichung 36) die Gränzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ einführen, indem man zugleich das Integral doppelt nimmt. Die Funktion

$$f(\vartheta) = \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta}{N}$$

besitzt dagegen die zweite Eigenschaft $f(\vartheta') = -f(\pi - \vartheta')$ und daher verschwinden die beiden anderen Integrale, indem sie aus sich gegenseitig hebenden Elementen bestehen. So vereinfacht sich der Werth von A bedeutend und reducirt sich auf

$$A = \frac{4\alpha\Theta}{a^2}\int_0^{\pi} d\omega \int_0^{1/2\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{N}$$

daraus wird durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$A = \frac{4\alpha\Theta}{a^2}\int_0^{1/2\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{N}.$$

Hinsichtlich des in Beziehung auf ω genommenen Integrales gilt nun dieselbe Bemerkung wie früher; da nämlich die Funktion $\frac{1}{N}$ von $\omega = \frac{1}{2}\pi$ bis $\omega = \pi$ dieselben Werthe annimmt, die sie schon von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ hatte, so kann man einfacher schreiben

$$A = \frac{8\alpha\Theta}{a^2}\int_0^{1/2\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{1/2\pi} \frac{d\omega}{N}. \tag{37}$$

Die auf ω bezügliche Integration ist sehr leicht ausführbar, wenn man in dem Werthe von N

$$\left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2}(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$$

setzt, wodurch derselbe die symmetrische Form

$$N = p^2\cos^2\omega + q^2\sin^2\omega$$

annimmt, bei welcher p und q als Abkürzungszeichen dienen, nämlich

$$p^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}$$

$$q^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}.$$

Es ist dann nach einer sehr bekannten Formel

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{d\omega}{N} = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\omega}{p^2\cos^2\omega + q^2\sin^2\omega} = \frac{1}{pq}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und mithin durch Einführung dieses Werthes

$$A = \frac{4\pi\Theta\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right\}\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right\}}}$$

oder auch

$$A = 4\pi\Theta\alpha b c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{(a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta)(a^2\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta)}}.$$

Durch Einführung einer neuen Variabeln $\cos\vartheta = t$, also $\sin\vartheta \, d\vartheta = -dt$ und $\sin^2\vartheta = 1 - t^2$, gestaltet sich dieser Ausdruck wie folgt:

$$38) \quad A = 4\pi\Theta\alpha b c \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{[a^2(1-t^2) + b^2 t^2][a^2(1-t^2) + c^2 t^2]}}$$

und man hat nun entsprechend durch Buchstabenvertauschung

$$39) \quad B = 4\pi\Theta\beta a c \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{[b^2(1-t^2) + a^2 t^2][b^2(1-t^2) + c^2 t^2]}}$$

$$40) \quad C = 4\pi\Theta\gamma a b \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{[c^2(1-t^2) + a^2 t^2][c^2(1-t^2) + b^2 t^2]}}.$$

Hier bedeuten α, β, γ die Coordinaten des Ellipsoidmittelpunktes, bezogen auf drei durch den angezogenen Punkt parallel zu den Ellipsoidachsen gelegte Coordinatenachsen; will man dagegen, wie es bequemer ist, die Achsen des Ellipsoides zu Coordinatenachsen nehmen, so müssen $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$ an die Stellen von α, β, γ gesetzt werden. Hierdurch ändern A, B, C nur ihre Vorzeichen, was wir weiter nicht zu beachten brauchen, da es uns nur auf die Grössen dieser Componenten, nicht aber darauf ankommt, in welchem Sinne sie wirken, indem letzterer unmittelbar bekannt ist. Wir können daher die vorigen Formeln ungeändert beibehalten, wenn wir unter A, B, C die absoluten Intensitäten der Anziehungscomponenten und unter α, β, γ die Coordinaten des angezogenen Punktes verstehen, wobei letztere auf die Achsen des Ellipsoides als Coordinatenachsen bezogen sind.

§. 6.

Formeln für das Rotationsellipsoid.

Die Ausführung der in den Gleichungen 38), 39) und 40) angedeuteten Integrationen ist durch logarithmische und cyklometrische Funktionen nicht möglich, weil die unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Ausdrücke vom vierten Grade sind. Man muss desshalb die Integrale entweder auf elliptische Funktionen zurückführen, wie es *Legendre* gethan hat, oder sie in unendliche Reihen verwandeln, oder endlich ihre Werthe nach der sogenannten Methode der Quadraturen berechnen. Es giebt indessen einen Fall, in welchem die Integration auf dem gewöhnlichen Wege bewerkstelligt werden kann, wenn nämlich zwei von den Achsen des Ellipsoides gleich sind, also das dreiachsige Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid übergeht. Nehmen wir ein- für allemal $a > b$, so kann nun entweder $c = b$ oder $c = a$ sein; das erste giebt ein gestrecktes, das zweite ein abgeplattetes Rotationsellipsoid; zugleich wollen wir die beiden Verhältnisse, in welchen die lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ zu den beiden Halbachsen steht, mit ε und λ bezeichnen:

$$41) \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

I. Für den Fall eines gestreckten Rotationsellipsoides ($c = b$) gehen die Formeln 38), 39), 40) in folgende über:

$$A = 4\pi\Theta\alpha \frac{b^2}{a^2} \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1 - \varepsilon^2 t^2}$$

$$B = 4\pi\Theta\beta \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 + \lambda^2 t^2}}$$

$$C = 4\pi\Theta\gamma \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 + \lambda^2 t^2}}.$$

Erinnert man sich an die bekannten Formeln der unbestimmten Integration .

$$\int \frac{t^2\,dt}{1-\varepsilon^2 t^2} = \frac{1}{\varepsilon^3}\left[\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+\varepsilon t}{1-\varepsilon t}\right) - \varepsilon t\right] + Const.$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}} = \frac{1}{2\lambda^3}\left[\lambda t\sqrt{1+\lambda^2 t^2} - l(\lambda t + \sqrt{1+\lambda^2 t^2})\right] + Const.$$

so ergeben sich für die Anziehungscomponenten folgende Werthe:

42) $$A = 4\pi\Theta.\frac{\alpha b^2}{a^2\varepsilon^3}\left[\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) - \varepsilon\right]$$

43) $$B = 2\pi\Theta.\frac{\beta a}{b\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right]$$

44) $$C = 2\pi\Theta.\frac{\gamma a}{b\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right].$$

II. Für den Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoides ($c=a$) nehmen die Formeln für A, B, C folgende Gestalten an:

$$A = 4\pi\Theta\alpha\frac{b}{a}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}}$$

$$B = 4\pi\Theta\beta\frac{a^2}{b^2}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}}$$

$$C = 4\pi\Theta\gamma\frac{b}{a}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}}.$$

Unter Anwendung der bekannten Formeln für unbestimmte Integration

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}} = \frac{Arcsin(\varepsilon t) - \varepsilon t\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}}{2\varepsilon^3} + Const.$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{1+\lambda^2 t^2} = \frac{\lambda t - Arctan(\lambda t)}{\lambda^3} + Const.$$

ergeben sich für A, B, C die nachstehenden Werthe:

45) $$A = 2\pi\Theta\frac{\alpha b}{a}\frac{Arcsin\,\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}$$

46) $$B = 4\pi\Theta\frac{\beta a^2}{b^2}\frac{\lambda - Arctan\,\lambda}{\lambda^3}$$

47) $$C = 2\pi\Theta\frac{\gamma b}{a}\frac{Arcsin\,\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}.$$

Bleiben wir bei dem Falle des abgeplatteten Ellipsoides, als dem in der Planetenwelt vorkommenden, noch einen Augenblick stehen.

Sind die numerische Excentricität ε und das Abplattungsmaass λ sehr kleine Brüche, wie wirklich in der Natur, so ist es vortheilhaft, die Grössen $Arcsin\,\varepsilon$, $\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und $Arctan\,\lambda$ in Potenzenreihen zu verwandeln, und man findet auf diese Weise:

$$A = 2\pi\,\Theta\,\frac{\alpha b}{a}\left\{\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{28}\varepsilon^4 + \ldots\right\}$$

$$B = 4\pi\,\Theta\,\frac{\beta a^2}{b^2}\left\{\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\lambda^2 + \tfrac{1}{7}\lambda^4 - \ldots\right\}$$

$$C = 2\pi\,\Theta\,\frac{\gamma b}{a}\left\{\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{28}\varepsilon^4 + \ldots\right\}$$

und wenn man die Masse des abgeplatteten Rotationsellipsoides $M = \frac{4}{3}a^2 b\pi\Theta$ in Rechnung bringt

$$A = \frac{M\alpha}{a^3}\left\{1 + \tfrac{3}{10}\varepsilon^2 + \tfrac{9}{56}\varepsilon^4 + \ldots\ldots\right\} \tag{48}$$

$$B = \frac{M\beta}{b^3}\left\{1 - \tfrac{3}{5}\lambda^2 + \tfrac{3}{7}\lambda^4 - \ldots\ldots\right\} \tag{49}$$

$$C = \frac{M\gamma}{a^3}\left\{1 + \tfrac{3}{10}\varepsilon^7 + \tfrac{9}{56}\varepsilon^4 + \ldots\ldots\right\} \tag{50}$$

Für die Kugel ist noch $b = a$ zu setzen, wo nun a den Halbmesser derselben bezeichnet; zugleich wird $M = \frac{4}{3}a^3\pi\Theta$, ε und λ verschwinden. Man hat dann einfacher

$$A = \frac{M\alpha}{a^3}\ ,\quad B = \frac{M\beta}{a^3}\ ,\quad C = \frac{M\gamma}{a^3}$$

folglich für die Resultante dieser Kräfte

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{M}{a^3}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\,\Theta . E,$$

wo E die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte der Kugel bezeichnet. Dieses Resultat stimmt, wie es sein muss, mit Dem überein, was wir auf anderem Wege in §. 4. entwickelt haben.

§. 7.

Das Reduktionstheorem von Ivory.

Um den Schwierigkeiten auszuweichen, welche die Integration eines verwickelten Radikales mit sich führt, sahen wir uns in §. 5. gezwungen, vorläufig auf die Berechnung der Kraft, womit das Ellipsoid einen aussenliegenden Punkt anzieht, zu verzichten. Wir kommen jetzt zu diesem Probleme zurück, um es von einer wesentlich anderen Seite zu betrachten, bei welcher die Unterscheidung eines inneren oder äusseren Punktes keinen so bedeutenden Unterschied in den Formeln hervorruft.

Nehmen wir die Achsen des Ellipsoides zu Coordinatenachsen und bezeichnen den angezogenen Punkt mit $\alpha\beta\gamma$, so ist die in der Richtung der x-Achse wirkende Componente der Anziehung

$$A = \Theta \int\int\int \frac{(\alpha - x)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^{3}} \tag{51}$$

indem wir die Dichtigkeit als unveränderlich voraussetzen.

Die angedeuteten Integrationen sind hier auf alle im Innern des Ellipsoides liegenden Punkte (Elemente) xyz zu erstrecken und aus dieser Bedingung die Integrationsgränzen zu bestimmen. Diese Bestimmung richtet sich nach der Reihenfolge, in welcher man die Integrationen ausführen will; da nun aus dem blossen Anblicke des Integrales erhellt, dass sich die auf x bezügliche Integration leicht ausführen lässt, nämlich

$$\int \frac{(\alpha - x)\, dx}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}^{3}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}},$$

so ist es am natürlichsten, mit der auf x bezüglichen Integration anzufangen, also etwa die Reihenfolge x, y, z einzuhalten.

In Fig. 4. seien $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ die drei Halbaxen des Ellipsoides, die drei Coordinatenachsen, F bezeichne einen beliebigen Punkt im Innern des Ellipsoides, welcher durch die drei Coordinaten $FG = x$, $GH = y$, $HO = z$ bestimmt ist. Verlängern wir die Coordinate FG, bis sie die Oberfläche des Ellipsoides in zwei Punkten F' und F'' schneidet (die Figur giebt nur den ersten Punkt), so sind die Gränzen für x offenbar $x = F''G$ bis $x = F'G$, oder $x = -F'G$ bis $x = +F'G$. Die Länge $F'G$ ist sehr leicht zu bestimmen, wenn man sich erinnert, dass F' ein Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoides ist und dass folg-

lich seine Coordinaten $F'G$, $GH=y$ und $HO=z$ der Gleichung der Ellipsoidoberfläche genügen müssen. Bezeichnen wir $F'G$ mit X, so muss demnach

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

sein und hieraus findet sich der Werth von X; die Gränzen für x sind also

$$52)\qquad \begin{cases} x=-X \text{ bis } x=+X \\ X=a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}. \end{cases}$$

Verlängern wir ferner $GH=y$, bis diese Gerade die Oberfläche in zwei Punkten G' und G'' trifft, so sind $y=G''H$ bis $y=G'H$, oder $y=-G'H$ bis $y=+G'H$ die Gränzen für y. Da auch der Punkt G' auf der Oberfläche des Ellipsoides liegt, so müssen seine Coordinaten wiederum die Gleichung der Ellipsoidoberfläche erfüllen. Für $G'H=Y$ sind diese Coordinaten: Null, Y und z, mithin ist

$$\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

und die Gränzen für y sind:

$$53)\qquad \begin{cases} y=-Y \text{ bis } y=+Y \\ Y=b\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}. \end{cases}$$

Die Gränzen für z endlich ergeben sich, wenn man $OH=z$ verlängert, bis diese Gerade die Ellipsoidoberfläche in zwei Punkten C und C' schneidet; diese Gränzen sind

$$z=-c \text{ bis } z=+c.$$

Nach diesen Erörterungen ist nun

$$A=\Theta\int_{-c}^{+c}dz\int_{-Y}^{+Y}dy\int_{-X}^{+X}\frac{(\alpha-x)\,dx}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^{\,3}}$$

wo statt X und Y die in 52) und 53) verzeichneten Werthe zu setzen wären. Sämmtliche Integrationsgränzen hängen von a, b, c ab und würden daher für ein zweites Ellipsoid nicht dieselben sein; um aber von a, b, c unabhängige Integrationsgränzen zu erhalten, bedarf es nur der Einführung dreier neuen Variabeln

$$x = a\xi,\ y = b\eta,\ z = c\zeta;$$

man hat dann zunächst

$$A = \Theta\, abc \int d\zeta \int d\eta \int \frac{(\alpha - a\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}^3}$$

und wenn $x = X$ geworden ist, würde $a\xi = X$, d. h.

$$\xi = \frac{X}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}$$

geworden sein; ebenso geht für $y = Y$, $b\eta$ in Y über und es ist

$$\eta = \frac{Y}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \zeta^2};$$

dem Werthe $z = c$ entspricht endlich $\zeta = 1$. Bezeichnen wir nun wie folgt:

54) $$\Xi = \sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}\ ,\quad \Omega = \sqrt{1 - \zeta^2},$$

so nimmt die Formel für A folgende Gestalt an:

$$A = \Theta\, abc \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\Omega}^{+\Omega} d\eta \int_{-\Xi}^{+\Xi} \frac{(\alpha - a\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}^3}$$

und hier können wir die auf ξ bezügliche Integration ausführen, indem wir

$$\int \frac{(\alpha - a\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}^3} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}}$$

und nachher für ξ die Gränzwerthe $+\Xi$ und $-\Xi$ setzen. So ergiebt sich ein Resultat von der Form

55) $$A = \Theta\, bc \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\Omega}^{+\Omega} d\eta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

worin r und R zur Abkürzung benutzt worden sind; nämlich

$$r = \sqrt{(\alpha - a\Xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}$$
$$R = \sqrt{(\alpha + a\Xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}.$$

Entwickelt man die unter dem Radikale stehenden Quadrate und setzt statt Ξ seinen Werth, so findet man ohne Mühe

56) $$\begin{aligned} r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 \\ - 2a\alpha\sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2} - 2b\beta\eta - 2c\gamma\zeta \\ - (a^2 - b^2)\eta^2 - (a^2 - c^2)\zeta^2 \end{aligned}$$

57) $$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 + 2a\alpha\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} - 2b\beta\eta - 2c\gamma\zeta - (a^2-b^2)\eta^2 - (a^2-c^2)\zeta^2.$$

Ohne nun einen Versuch zur weiteren Integration in No. 55) zu machen, betrachten wir jetzt ein zweites Ellipsoid mit den neuen Halbachsen a_1, b_1, c_1, welches einen zweiten Punkt $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ anzieht. Die Componente A_1 desselben wird dann durch die entsprechenden Formeln

58) $$A_1 = \Theta b_1 c_1 \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\Omega}^{+\Omega} d\eta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_1}\right)$$

59) $$r_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + a_1^2 - 2a_1\alpha_1\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} - 2b_1\beta_1\eta - 2c_1\gamma_1\zeta - (a_1^2-b_1^2)\eta^2 - (a_1^2-c_1^2)\zeta^2$$

60) $$R_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + a_1^2 + 2a_1\alpha_1\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} - 2b_1\beta_1\eta - 2c_1\gamma_1\zeta - (a_1^2-b_1^2)\eta^2 - (a_1^2-c_1^2)\zeta^2$$

bestimmt, indem wir voraussetzen, dass das zweite Ellipsoid mit dem ersten gleiche Dichtigkeit besitze. Könnte man nun die sechs Grössen a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 so bestimmen, dass $r_1 = r$ und zugleich $R_1 = R$ wäre, so würde das in 55) vorkommende Doppelintegral dem in No. 58) vorkommenden identisch sein und man hätte dann durch Division

$$\frac{A}{A_1} = \frac{bc}{b_1 c_1}$$

also eine sehr einfache Beziehung zwischen A und A_1.

Aus der Vergleichung von r und r_1, sowie von R und R_1 ergeben sich nun folgende sechs Gleichungen:

61) $$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + a_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2$$

62) $$a_1\alpha_1 = a\alpha, \quad b_1\beta_1 = b\beta, \quad c_1\gamma_1 = c\gamma$$

63) $$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2, \quad a_1^2 - c_1^2 = a^2 - c^2.$$

Bleiben wir zunächst bei den zwei letzten Gleichungen stehen, aus welchen durch Subtraction noch

64) $$b_1^2 - c_1^2 = b^2 - c^2$$

folgt, so erkennen wir, dass das gesuchte Ellipsoid dieselben linearen Excentricitäten besitzt wie das gegebene, dass also beide Ellipsoide con-

fokal sind. Wir geben nun den Gleichungen 63) und 64) die bessere Form

$$a_1{}^2 - a^2 = b_1{}^2 - b^2 = c_1{}^2 - c^2$$

und nennen ω den gemeinschaftlichen, noch unbekannten Werth dieser drei Quadratdifferenzen; aus

$$a_1{}^2 - a^2 = \omega,\quad b_1{}^2 - b^2 = \omega,\quad c_1{}^2 - c^2 = \omega$$

folgen dann die Gleichungen

$$a_1 = \sqrt{a^2 + \omega},\quad b_1 = \sqrt{b^2 + \omega},\quad c_1 = \sqrt{c^2 + \omega}, \tag{65}$$

welche zur Bestimmung der Halbachsen des neuen Ellipsoides dienen, sobald ω erst bekannt ist. Die Gleichungen 62) geben nun weiter die Coordinaten α_1, β_1, γ_1 des vom zweiten Ellipsoide angezogenen Punktes, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a\alpha}{a_1} = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2+\omega}} \\ \beta_1 &= \frac{b\beta}{b_1} = \frac{b\beta}{\sqrt{b^2+\omega}} \\ \gamma_1 &= \frac{c\gamma}{c_1} = \frac{c\gamma}{\sqrt{c^2+\omega}}. \end{aligned}\right. \tag{66}$$

Um endlich ω zu bestimmen, substituiren wir die für a_1, b_1, c_1 und α_1, β_1, γ_1 gefundenen Werthe in die Gleichung 61), nachdem wir letztere in der besseren Form

$$\alpha^2 - \alpha_1{}^2 + \beta^2 - \beta_1{}^2 + \gamma^2 - \gamma_1{}^2 = a_1{}^2 - a^2$$

dargestellt haben; es folgt dann

$$\frac{\alpha^2\omega}{a^2+\omega} + \frac{\beta^2\omega}{b^2+\omega} + \frac{\gamma^2\omega}{c^2+\omega} = \omega$$

und diese Gleichung ist auf doppelte Weise erfüllbar, entweder durch $\omega = 0$, oder durch

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\omega} + \frac{\beta^2}{b^2+\omega} + \frac{\gamma^2}{c^2+\omega} = 1. \tag{67}$$

Im ersten Falle würde das zweite Ellipsoid dem ersten congruent und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ mit $\alpha\beta\gamma$ identisch sein, was nichts der Aufmerksamkeit Werthes giebt. Bedeutender dagegen ist der zweite Fall, der auf eine cubische Gleichung führt und demnach wenigstens einen reellen Werth von ω liefert. Da unter diesen Umständen r mit r_1, R mit R_1 identisch wird, so können wir jetzt folgendes Theorem aussprechen:

Wenn ein Ellipsoid einen Punkt anzieht, so giebt es immer ein zweites confokales Ellipsoid der Art, dass die Componenten der Anziehungen, welche das erste Ellipsoid auf den gegebenen Punkt und das zweite auf einen anderen Punkt ausüben, den Produkten aus den einschliessenden Achsen proportional sind, nämlich

68) $$A : A_1 = bc : b_1 c_1.$$

Dieser Satz gestattet eine sehr elegante Anwendung auf den Fall, wenn der Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausserhalb des ersten Ellipsoides liegt, also

69) $$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} > 1$$

ist. Bezeichnen wir nämlich die linke Seite der Gleichung 67) mit $F(\omega)$ und lassen wir ω von 0 bis ∞ wachsen, so ist $F(\omega)$ eine fortwährend abnehmende Funktion von ω; im Anfange hat man wegen Nr. 69) $F(0) > 1$, nachher $F(\infty) = 0 < 1$ und mithin giebt es einen einzigen positiven Werth von ω, für welchen $F(\omega) = 1$ wird. Nehmen wir also für ω die einzige reelle positive Wurzel der Gleichung 67), so folgt aus No. 65), dass das zweite Ellipsoid grössere Halbaxen besitzt als das erste, und aus No. 66), dass der Punkt $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ dem Coordinatenanfange näher liegt als $\alpha\beta\gamma$. Durch Substitution von 65) in 67) wird

$$\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} + \frac{\gamma^2}{c_1^2} = 1$$

d. h. der Punkt $\alpha\beta\gamma$ liegt auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoides drückt man mittelst der Gleichungen 66) α_1, β_1, γ_1 durch α, β, γ aus,; so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} = 1$$

d. h. der Punkt $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ liegt auf der Oberfläche des ersten Ellipsoides, also im Innern des zweiten Ellipsoides. Vermöge dieser Eigenschaft kann man A_1 nach den Formeln der §§. 5. und 6. berechnen und dann ergiebt sich A mittelst der Proportion $A : A_1 = bc : b_1 c_1$. So gelangen wir zu folgendem Endresultate:

Um die Anziehung zu berechnen, welche ein homogenes Ellipsoid E auf einen aussenliegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausübt, construire man zunächst ein dem ersten confokales Ellipsoid E_1, dessen Oberfläche durch $\alpha\beta\gamma$ geht und dessen Dichtigkeit der von E gleich ist. Die-

ses zweite Ellipsoid E_1 lasse man auf einen Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ wirken, der auf der Oberfläche von E, also im Innern von E_1 liegt, und dessen Coordinaten nach den Formeln 66) bestimmt werden. Aus den Componenten A_1, B_1, C_1 der von E_1 auf $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ ausgeübten Anziehung leitet man nachher die gesuchten Componenten A, B, C mittelst der Formeln ab:

$$A = \frac{bc}{b_1 c_1} A_1 \quad , \quad B = \frac{ac}{a_1 c_1} B_1 \quad , \quad C = \frac{ab}{a_1 b_1} C_1.$$

Wenden wir diess auf das abgeplattete Rotationsellipsoid ($c = a > b$) an, so haben wir unter ω die positive Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\text{70)} \qquad \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{a^2 + \omega} + \frac{\beta^2}{b^2 + \omega} = 1$$

zu verstehen und es ist nun

$$a_1 = \sqrt{a^2 + \omega} = c_1 \quad , \quad b_1 = \sqrt{b^2 + \omega}$$

für die Excentricität und Abplattung des neuen Ellipsoides gelten die Formeln

$$\text{71)} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + \omega}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{\omega}{a^2}}}$$

$$\text{72)} \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{b_1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + \omega}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\omega}{b^2}}}$$

und für den neuen Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ sind die Coordinaten

$$\text{73)} \qquad \alpha_1 = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 + \omega}} \; , \; \beta_1 = \frac{b\beta}{\sqrt{b^2 + \omega}} \; , \; \gamma_1 = \frac{a\gamma}{\sqrt{a^2 + \omega}}.$$

Die Componente A bestimmt sich nun wie folgt:

$$A = \frac{ba}{b_1 a_1} \cdot 2\pi\Theta \, \frac{\alpha_1 b_1}{a_1} \, \frac{Arcsin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3}$$

oder nach Substitution der Werthe von a_1, b_1 und α_1

$$\text{74)} \qquad A = 2\pi\Theta\alpha \, \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + \omega}^3} \, \frac{Arcsin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3}$$

wo nur noch die Werthe von ε_1 und ω aus 71) und 70) einzusetzen wären, was wir unterlassen, um die Formel nicht zu compliziren. Für B und C erhält man ebenso leicht:

$$B = 4\pi\,\Theta\beta \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2+\omega}^3}\,\frac{\lambda_1 - Arctan\,\lambda_1}{\lambda_1^3} \tag{75}$$

$$C = 2\pi\,\Theta\gamma \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2+\omega}^3}\,\frac{Arcsin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3}. \tag{76}$$

Für die Kugel ($b = a$) wird $\omega = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2$, und die Ausdrücke rechter Hand gehen bezüglich in $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ über; man erhält so drei Componenten, deren Resultante

$$R = \tfrac{4}{3} a^3 \pi\,\Theta\,.\,\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

ist, was mit dem Früheren übereinstimmt.

§. 8.

Anziehung eines aus ähnlichen Schichten bestehenden Ellipsoides.

Wir betrachten jetzt allgemeiner die Anziehung, welche ein Ellipsoid von ungleichförmiger Dichtigkeit auf einen beliebigen Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausübt, und um über das Gesetz der Dichtigkeitsveränderung innerhalb des Ellipsoides eine bestimmte Annahme zu haben, wollen wir voraussetzen, dass die Dichtigkeit im Punkte xyz durch

$$\Theta = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \tag{77}$$

ausgedrückt werde, wo f eine beliebige Funktion bezeichnet. Die statische Bedeutung dieser Supposition ist sehr einfach; alle diejenigen Elemente nämlich, für welche die eingeklammerte Summe einen constanten Werth erhält, etwa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = s \tag{78}$$

oder

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{z}{c\sqrt{s}}\right)^2 = 1$$

liegen auf der Oberfläche eines mit den Halbachsen $a\sqrt{s}$, $b\sqrt{s}$ und $c\sqrt{s}$ beschriebenen Ellipsoides, welches dem ursprünglichen Ellipsoide ähnlich ist; einem individuellen Werthe von s entspricht also eine unendlich dünne homogene ellipsoidische Schaale und die Aenderung von s giebt den Uebergang von einer solchen Schicht zur anderen. Unter der

gemachten Voraussetzung besteht demnach das Ellipsoid aus einer stetigen Folge ähnlicher Schichten, deren jede für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht wechselt. Das Potenzial der Anziehung ist nunmehr

79) $$P=\int\int\int\frac{f(s)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}}$$

und darin beziehen sich die drei Integrationen auf alle im Innern des Ellipsoides liegenden Elemente, d. h. auf alle die positiven und negativen x, y, z, welche der Ungleichung

$$1>\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2>0$$

oder $$1>s>0$$

Genüge leisten. Führen wir zur Vermeidung von Brüchen drei neue Variable ξ, η, ζ ein, welche durch die Gleichungen $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=c\zeta$ bestimmt werden, so ist einfacher

80) $$s=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

81) $$P=abc\int\int\int\frac{f(s)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(\alpha-a\xi)^2+(\beta-b\eta)^2+(\gamma-c\zeta)^2}}$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven und negativen der Ungleichung

82) $$1>\xi^2+\eta^2+\zeta^2>0 \text{ oder } 1>s>0$$

genügenden ξ, η, ζ beziehen. — Zur Ausführung dieser dreifachen Integration würden nun die bisher angewendeten Mittel nicht mehr zureichen und wir bedienen uns daher einer wesentlich verschiedenen Methode, deren Grundzüge von *Lejeune Dirichlet* entwickelt worden sind, und welche im Wesentlichen darauf hinauskommt, das zu reduzirende vielfache Integral mit einem Faktor zu multipliziren, welcher eine endliche Grösse besitzt oder verschwindet, je nachdem die Bedingungsgleichung des Integrales [hier No. 82)] erfüllt oder nicht erfüllt ist. Um diesen Kunstgriff hier anwenden zu können, erinnern wir an das Theorem von *Fourier*, demzufolge der Werth des Doppelintegrales *)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos s\omega\,d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

*) s. Note III.

$= f(s)$ oder gleich Null ist, je nachdem die positive Grösse s weniger oder mehr als die Einheit beträgt; wir haben daher auch

$$83)\quad P = abc\frac{2}{\pi}\int\int\int\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta,$$

wo r als Abkürzung benutzt worden ist, nämlich

$$84)\quad r^2 = (\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2.$$

In dem für P angegebenen Integrale lassen sich aber die auf ξ, η, ζ bezüglichen Integrationen auf beliebig erweiterte Gränzen ausdehnen; da nämlich das als Faktor zugesetzte Doppelintegral für $s > 1$ verschwindet, so werden hierdurch alle Elemente, welche der Bedingung $s < 1$ nicht genügen, von selbst ausgeschieden. Setzen wir

$$85)\quad P = \frac{2}{\pi}abc\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

so wäre diess das Potenzial der vom unendlichen Raume auf den Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausgeübten Anziehung, jedoch mit der Rücksicht, dass im Innern eines gegebenen Ellipsoides (d. h. für $s < 1$) die Dichtigkeit $= f(s)$, ausserhalb desselben $= 0$ wäre, was mit dem Potenziale des Ellipsoides auf Dasselbe hinauskommt, weil der leere Raum keine Anziehung ausübt. Wir haben uns daher einzig und allein mit dem Integrale in No. 85) zu beschäftigen, statt dessen wir auch das folgende

$$86)\quad Q = \frac{2}{\pi}abc\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\int_0^\infty e^{s\omega i}\, d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\, d\vartheta$$

betrachten können, von welchem P den reellen Bestandtheil ausmacht, wenn i die Wurzel $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Versparen wir die auf ϑ und ω bezüglichen Integrationen bis zuletzt, so ist auch

$$Q = \frac{2}{\pi}abc\int_0^\infty d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\, d\vartheta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}e^{s\omega i}$$

wobei es zunächst auf die Ausführung der drei für ξ, η, ζ geltenden Integrationen ankommt; wir setzen daher

$$87) \qquad Q = \frac{2}{\pi} a\, b\, c \int_0^\infty d\omega \int_0^1 f(\vartheta) \cos\omega\vartheta\, d\vartheta \,.\, S,$$

wobei S als Abkürzung dient und sich die Aufmerksamkeit nunmehr auf die Gleichung

$$88) \qquad S = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} e^{s\omega i}$$

zu richten hat. Der Uebersichtlichkeit wegen widmen wir dieser Reduktion einen besonderen Paragraphen.

§. 9.
Fortsetzung.

Unmittelbar ist die für S angegebene dreifache Integration nicht ausführbar, sie wird es aber auf der Stelle, sobald man den unbequemen Faktor $\frac{1}{r}$ selbst wieder in ein bestimmtes Integral verwandelt. Nach einer bekannten Formel hat man nämlich*)

$$\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} e^{k\psi i} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{1/_4 \pi i}$$

folglich umgekehrt, wenn $k = r^2$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1/_4 \pi i} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} e^{r^2 \psi i}.$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die Gleichung

$$S = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{s\omega i} \frac{1}{r}$$

in die folgende über:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1/_4 \pi i} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{s\omega i} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} e^{r^2\psi i}$$

und in dieser versparen wir die auf ψ bezügliche Integration bis zuletzt; es ist dann

---

*) s. Note IV.

$$89)\quad S=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int_0^\infty\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{(s\omega+r^2\psi)i}.$$

Die drei auf ξ, η, ζ bezüglichen Integrationen können jetzt mit einem Schlage ausgeführt werden. Vermöge der Werthe von s und r^2 ist nämlich bei vollständiger Entwickelung

$$\begin{aligned} s\omega+r^2\psi=&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\psi\\ &+(a^2\psi+\omega)\xi^2-2a\alpha\psi\xi\\ &+(b^2\psi+\omega)\eta^2-2b\beta\psi\eta\\ &+(c^2\psi+\omega)\zeta^2-2c\gamma\psi\zeta. \end{aligned}$$

Die in No. 89) vorkommende Exponenzialgrösse zerfällt nunmehr in vier Faktoren, von denen der erste in Beziehung auf ξ, η, ζ constant ist, der zweite nur ξ, der dritte nur η und der letzte nur ζ enthält. Zufolge dieser Sonderung der Variabeln verwandelt sich das dreifache Integral

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{(s\omega+r^2\psi)i}$$

in das Produkt der folgenden vier Faktoren:

$$e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\psi i}$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\xi\,.\,e^{[(a^2\psi+\omega)\xi^2-2a\alpha\psi\xi]\,i}$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\eta\,.\,e^{[(b^2\psi+\omega)\eta^2-2b\beta\psi\eta]\,i}$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\zeta\,.\,e^{[(c^2\psi+\omega)\zeta^2-2c\gamma\psi\zeta]\,i}.$$

Nach einer bekannten Formel ist nun *)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{[hv^2-2kv]i}\,dv=\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{1}{4}\pi i-\frac{k^2}{h}i}$$

und mit Hülfe derselben lassen sich die obigen Integrationen ausführen, indem man successiv $v=\xi$, η, ζ

*) s. Note V.

$$h = a^2\psi + \omega, \quad b^2\psi + \omega, \quad c^2\psi + \omega$$
$$k = a\alpha\psi \quad, \quad b\beta\psi \quad, \quad c\gamma\psi$$

setzt. Durch Ausführung dieser kleinen Rechnung und nachherige Vereinigung jener vier Faktoren findet man ohne Mühe, dass das dreifache Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{(s\omega + r^2\psi)i}$$

folgenden Werth hat:

$$\frac{\sqrt{\pi}^3}{\sqrt{(a^2\psi+\omega)(b^2\psi+\omega)(c^2\psi+\omega)}}\, e^{3/4\pi i + \Psi i},$$

worin zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$\Psi = \frac{\alpha^2\omega\psi}{a^2\psi+\omega} + \frac{\beta^2\omega\psi}{b^2\psi+\omega} + \frac{\gamma^2\omega\psi}{c^2\psi+\omega}.$$

Substituiren wir nun den soeben gefundenen Werth des in Beziehung auf ξ, η, ζ genommenen dreifachen Integrales in die Gleichung 89), so wird

$$90)\quad S = \pi e^{3/4\pi i}\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\, \frac{e^{\Psi i}}{\sqrt{(a^2\psi+\omega)(b^2\psi+\omega)(c^2\psi+\omega)}}.$$

Diess lässt sich noch etwas einfacher darstellen, wenn man statt ψ eine neue Variable t der Art einführt, dass $\psi = \frac{\omega}{t}$ ist, wobei ω als Constante angesehen wird. Man erhält dann

$$d\psi = -\frac{\omega}{t^2}\, dt$$

und die Grösse Ψ geht über in

$$\frac{\alpha^2\omega}{a^2+t} + \frac{\beta^2\omega}{b^2+t} + \frac{\gamma^2\omega}{c^2+t}.$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung in nachstehender Weise

$$91)\qquad T = \frac{\alpha^2}{a^2+t} + \frac{\beta^2}{b^2+t} + \frac{\gamma^2}{c^2+t},$$

so ist einfach $\Psi = \omega T$ und die Gleichung 90) gestaltet sich wie folgt:

$$92)\qquad S = \pi e^{3/4\pi i}\,\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dt\,.\,e^{\omega T i}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}$$

womit S auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht ist.

§. 10.

Schluss.

Kehren wir nun zur Formel 87) zurück und führen in dieselbe den Werth von S ein, so ergiebt sich jetzt

$$Q=2abc\,e^{\frac{1}{2}\pi i}\int_0^\infty d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta\,\frac{1}{\omega}\int_0^\infty\frac{dt\,e^{\omega T i}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}$$

oder wenn wir die auf t bezügliche Integration bis zuletzt aufsparen

$$Q=2abc\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}e^{(\frac{1}{2}\pi+T\omega)i}\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta.$$

Der reelle Bestandtheil hiervon ist das Potential, nämlich

$$P=-2abc\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}\sin T\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

und hieraus findet sich die Componente A der Anziehung durch die Formel $A=-D_\alpha P$, wobei zu berücksichtigen ist, dass α nur in T vorkommt und

$$\frac{d(\sin T\omega)}{d\alpha}=\omega\cos T\omega\,.\,\frac{dT}{d\alpha}=\omega\cos T\omega\,.\,\frac{2\alpha}{a^2+t}$$

ist. Nach dieser Bemerkung ergiebt sich sogleich

93)

$$A=4\alpha abc\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\,.\,\frac{1}{a^2+t}\int_0^\infty\cos T\omega d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta.$$

Hier lässt sich der Werth des auf ϑ und ω bezogenen Doppelintegrales

$$94)\qquad \int_0^\infty\cos T\omega\,d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

sehr leicht mittelst des Theoremes von *Fourier* entwickeln, wenn man auf die Unterscheidung der Fälle $T<1$ und $T>1$ eingeht.

Liegt der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ innerhalb des anziehenden Ellipsoides, so ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1$$

folglich um so mehr

$$\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}<1$$

d. h.

$$T<1,$$

weil t vermöge der Integrationsgränzen $t=0$ bis $t=\infty$ nur positive Werthe erlangt; das in Nr. 94) verzeichnete Doppelintegral ist dann $=\frac{1}{2}\pi\, f(T)$ und mithin für einen inneren Punkt

$$95)\qquad A=2\pi\alpha\, abc\int_0^\infty \frac{f(T)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\,\frac{dt}{a^2+t}.$$

Diess gilt auch noch für einen auf der Oberfläche des Ellipsoides liegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$; bei diesem ist zwar

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1,$$

aber wegen $t>0$ doch noch $T<1$.

Befindet sich dagegen der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausserhalb des Ellipsoides, so ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>1,$$

also anfangs, d. h. für $t=0$, $T>1$. Während aber t das Integrationsintervall $t=0$ bis $t=\infty$ durchläuft, nimmt T fortwährend ab bis zur Null. Es giebt daher eine Stelle, bis zu welcher $T>1$ ist und von welcher ab $T<1$ wird und bleibt; diese Stelle bestimmt sich durch Auflösung der Gleichung $T=1$ oder

$$\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}=1.$$

Nennen wir τ die reelle positive Wurzel derselben, so ist $T>1$ so lange $t<\tau$, dagegen $T<1$, wenn $t>\tau$. Zerlegen wir nun das Integrationsintervall $t=0$ bis $t=\infty$ in zwei andere von $t=0$ bis $t=\tau$ und von da bis $t=\infty$, so ist

$$A=4\alpha\, abc\int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\,\frac{1}{a^2+t}\int_0^\infty \cos T\omega\, d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\, d\vartheta$$

$$+\,4\alpha\, abc\int_\tau^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\,\frac{1}{a^2+t}\int_0^\infty \cos T\omega d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\, d\vartheta.$$

Im ersten Integrale hat man wegen $t < \tau$, $T > 1$ und folglich

$$\int_0^\infty \cos T\omega \, d\omega \int_0^1 f(\vartheta) \cos \omega\vartheta \, d\vartheta = 0,$$

im zweiten Integrale wegen $t > \tau$, $T < 1$, mithin

$$\int_0^\infty \cos T\omega \, d\omega \int_0^1 f(\vartheta) \cos \omega\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi f(T)$$

und mithin bleibt übrig

$$96) \qquad A = 2\pi\alpha abc \int_\tau^\infty \frac{f(T)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \frac{dt}{a^2+t}.$$

Fassen wir alles Bisherige zusammen, so haben wir folgendes Theorem:

Unter den hinsichtlich der Dichtigkeit gemachten Voraussetzungen ist die längs der Halbaxe a wirkende Componente der Anziehung

$$97) \qquad A = 2\pi\alpha abc \int_\omega^\infty \frac{f(T)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \frac{dt}{a^2+t},$$

wobei an die Stelle der unteren Integrationsgränze ω die reelle positive Wurzel der Gleichung $T = 1$ oder die Null zu setzen ist, je nachdem der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausserhalb des Ellipsoides liegt oder nicht.

Für eine constante Dichtigkeit $f(s) = \Theta$, also auch $f(T) = \Theta$, wird

$$A = 2\pi\Theta abc \int_\omega^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \frac{dt}{a^2+t}.$$

Bei einem inneren Punkte, d. h. für $\omega = 0$, ist die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit dem früher in §. 5. gefundenen Werthe von A leicht nachzuweisen; es bedarf nur der Substitution $t = a^2 \tan^2 \vartheta$, um die vorstehende Formel sogleich in diejenige überzuführen, welche vor No. 38) vorhergeht.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch ein Reduktionstheorem, welches sich an die Formel 97) knüpft. Unter der Voraussetzung eines aussenliegenden Punktes führen wir nämlich in die Formel

$$A = 2\pi\, \alpha a b c \int_{\omega}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\, f\left(\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}\right)$$

eine neue Variable t_1 der Art ein, dass $t = \omega + t_1$ ist; zugleich setzen wir

98) $$a^2+\omega = a_1^2,\quad b^2+\omega = b_1^2,\quad c^2+\omega = c_1^2;$$

es ergiebt sich dann sogleich

$$A = 2\pi\, \alpha abc \int_{0}^{\infty} \frac{dt_1}{(a_1^2+t_1)\sqrt{(a_1^2+t_1)(b_1^2+t_1)(c_1^2+t_1)}}\, f\left(\frac{\alpha^2}{a_1^2+t_1}+\frac{\beta^2}{b_1^2+t_1}+\frac{\gamma^2}{c_1^2+t_1}\right).$$

Lassen wir aber ein neues Ellipsoid mit den Halbaxen a_1, b_1, c_1 denselben Punkt $\alpha\beta\gamma$ unter der Voraussetzung anziehen, dass derselbe nicht ausserhalb des Ellipsoides liegt, so wäre die Componente A_1 dieser Anziehung:

$$A_1 = 2\pi\alpha\, a_1 b_1 c_1 \int_{0}^{\infty} \frac{dt_1}{(a_1^2+t_1)\sqrt{(a_1^2+t_1)(b_1^2+t_1)(c_1^2+t_1)}}\, f\left(\frac{\alpha^2}{a_1^2+t_1}+\frac{\beta^2}{b_1^2+t_1}+\frac{\gamma^2}{c_1^2+t_1}\right)$$

und folglich durch Vergleichung mit dem Vorhergehenden:

99) $$\frac{A}{A_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}.$$

Auf ganz gleiche Weise wäre

$$\frac{B}{B_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\ ,\quad \frac{C}{C_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}$$

und folglich würde auch für die Resultanten R und R_1 dieser Anziehungen die ähnliche Beziehung

100) $$\frac{R}{R_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi abc}{\frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1}$$

statt finden. Aus den Gleichungen 98) geht nun aber hervor, dass die beiden Ellipsoide gleiche Excentricitäten

$$\sqrt{a_1^2-b_1^2} = \sqrt{a^2-b^2}\ ,\ \sqrt{a_1^2-c_1^2} = \sqrt{a^2-c^2}\ ,\ \sqrt{b_1^2-c_1^2} = \sqrt{b^2-c^2}$$

besitzen; aus der zur Bestimmung von ω dienenden Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\omega}+\frac{\beta^2}{b^2+\omega}+\frac{\gamma^2}{c^2+\omega} = 1$$

folgt andererseits mittelst der Gleichungen 98)

$$\frac{\alpha^2}{a_1^2}+\frac{\beta^2}{b_1^2}+\frac{\gamma^2}{c_1^2} = 1,$$

d. h. die Oberfläche des zweiten Ellipsoides geht durch $\alpha\beta\gamma$; demnach dürfen wir jetzt folgendes bemerkenswerthe Theorem aussprechen:

Wenn ein aus stetig aufeinanderfolgenden ähnlichen homogenen Schichten zusammengesetztes Ellipsoid einen aussenliegenden Punkt anzieht, und ein zweites, dem ersten confokales, Ellipsoid construirt wird, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht und dessen Dichtigkeit nach demselben Gesetze variirt, so verhalten sich die gleichnamigen Componenten der Anziehungen, welche beide Ellipsoide auf jenen Punkt ausüben (der nun ausserhalb des ersten, aber auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoides liegt), wie die Volumina der beiden Körper; dasselbe Verhältniss gilt auch für die resultirenden Anziehungen selbst.

Man wird sogleich bemerken, dass dieses neue Theorem dem von *Ivory* aufgestellten ähnlich, aber insofern einfacher ist, als es nicht der Bestimmung eines correspondirenden Punktes bedarf, welcher von dem zweiten Ellipsoide angezogen wird. Wie diese grössere Einfachheit mit der Sache selbst zusammenhängt, mag aus folgender Bemerkung erhellen. Die Bestimmung der Componente A erfordert eine dreifache Integration; führt man keine von diesen drei Integrationen aus, so lassen sich die Anziehungen, welche zwei Ellipsoide auf einen oder auch auf zwei verschiedene Punkte ausüben, nur dadurch proportional machen, dass man das zweite Ellipsoid dem ersten congruent nimmt und die angezogenen Punkte zusammenfallen lässt; diess giebt aber absolute Identität und mithin keine brauchbare Vergleichung. Führt man dagegen eine von jenen drei Integrationen aus, wie es in §. 7. geschehen ist, so erhält man einigen Spielraum und kann jetzt die Proportionalität der Componenten sowohl durch Congruenz ($\omega=0$) als auf eine zweite Weise (durch die cubische Gleichung für ω) bewirken, und zwar erfordert das Letztere die Auflösung von 6 Gleichungen. Führt man aber zwei von jenen drei Integrationen aus, wie diess durch die Formel 97) geschehen ist, so wird die Beweglichkeit noch grösser und es bedarf nur noch dreier Gleichungen, um die Proportionalität der Componenten zu erlangen.

Die Allgemeinheit des aufgestellten Theorems erlaubt natürlich eine Anwendung desselben auf den Fall eines homogenen Ellipsoides, indem wir nur $f(s) = f(T) = \Theta$ constant zu nehmen brauchen. Setzen wir $c = a > b$, also auch $c_1 = a_1 > b_1$, so wäre jetzt für das abgeplattete Rotationsellipsoid

$$A = \frac{a^2 b}{a_1^2 b_1^2} A_1,$$

wo A_1 die Componente der Anziehung bedeutet, die ein aus den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{a^2 + \omega}\ ,\ b_1 = \sqrt{b^2 + \omega}$$

construirtes abgeplattetes Rotationsellipsoid auf den in seiner Oberfläche liegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausübt. Diese Componente A_1 wäre nach No. 45)

$$A_1 = 2\pi\Theta \frac{\alpha b_1}{a_1} \frac{Arcsin\, \varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3},$$

worin ε_1 die numerische Excentricität des neuen Ellipsoides bezeichnet; hieraus folgt

$$A = 2\pi\Theta\alpha \frac{a^2 b}{a_1^3} \frac{Arcsin\, \varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3},$$

was mit der Formel 74) übereinstimmt, wenn man statt a_1 seinen Werth einsetzt.

Zu pag. 39. Ist $u = \int_0^1 f(\theta) \int_0^\infty \frac{\sin T\omega \cos \theta\omega}{\omega} \partial\omega$, und $\Delta(t) = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}$ [illegible]

so ist das Potential $P = -2abc \int_0^\infty \frac{u\,\partial t}{\Delta(t)}$.

Nach pag. 52. ist aber:

$u = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(\theta)\,\partial\theta$, wenn $T > 1$,

$u = \frac{\pi}{2}\int_0^T f(\theta)\,\partial\theta$, wenn $0 < T < 1$.

Liegt der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ im Innern des Ellipsoids, so ist für jedes positive t $0 < T < 1$, also

$$P = -\pi abc \int_0^\infty \frac{\partial t}{\Delta(t)} \int_0^T f(\theta)\,\partial\theta.$$

Liegt $\alpha\beta\gamma$ außerhalb des Ellipsoids, so wird für $t = t_0$, wo $t_0 > 0$ ist, $T = 1$; und es ist die positive Größe T kleiner oder größer als 1, jenachdem t größer oder kleiner als t_0 ist. Es ist daher

$$P = -\pi abc \left\{ \int_0^{t_0} \frac{u\,\partial t}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^\infty \frac{u\,\partial t}{\Delta(t)} \right\}.$$

$$T > 1 \qquad\qquad 0 < T < 1$$

also

$$P = -\pi abc \left\{ \int_0^{t_0} \frac{\partial t}{\Delta(t)} \int_0^1 f(\theta)\,\partial\theta + \int_{t_0}^\infty \frac{\partial t}{\Delta(t)} \int_0^T f(\theta)\,\partial\theta \right\}$$

Noten.

I. In Fig. 1. seien OX, OY, OZ die drei Coordinatenachsen und $OK = x$, $KL = y$, $LM = z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes M; die polaren Coordinaten desselben Punktes mögen heissen $OM = \varrho$, $\angle MOX = \vartheta$ und $\angle MKL = \omega$; unter diesen Voraussetzungen ist in dem bei K rechtwinkligen Dreiecke OKM

$$OK = OM \cos MOK, \text{ d. h. } x = \varrho \cos \vartheta$$
$$MK = OM \sin MOK = \varrho \sin \vartheta;$$

ferner in dem bei L rechtwinkligen Dreiecke KLM

$$KL = KM \,.\, \cos MKL, \text{ d. i. } y = \varrho \sin \vartheta \,.\, \cos \omega$$
$$LM = KM \,.\, \sin MKL, \text{ d. i. } z = \varrho \sin \vartheta \,.\, \sin \omega$$

und diess sind die bekannten Formeln zur Verwandlung von rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten.

Lassen wir ϱ, ϑ, ω sich ändern und zwar ϱ um das unendlich kleine Inkrement $MU = d\varrho$, den Winkel ϑ um $MOV = d\vartheta$ und ω um $MKW = d\varrho$, so erhalten wir das Volumenelement dV in Polarcoordinaten ausgedrückt. Obwohl dasselbe die Form eines Gewölbsteines besitzt, so kann man es, wegen der unendlichen Kleinheit seiner Dimensionen, doch als Parallelopiped mit den drei Kanten

$$MU = \varrho, \; MV = \varrho\, d\vartheta, \; MW = MK \,.\, d\omega = \varrho \sin \vartheta\, d\omega$$

betrachten, und so gewinnt man die Formel

$$dV = MU \,.\, MV \,.\, MW = \varrho^2 \sin \vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\omega,$$

von welcher im Texte mehrfach Gebrauch gemacht worden ist.

II. Es kommt häufig vor, dass in einem bestimmten Integrale sowohl die zu integrirende Funktion als auch die beiden Integrationsgränzen eine und dieselbe willkührliche Constante enthalten, wie diess z. B. bei

$$\int_{l\mu}^{\sqrt{\mu}} \frac{dx}{\mu^2 + x^2}$$

der Fall ist; das allgemeine Schema eines solchen Integrals wäre

$$1)\qquad S=\int_a^b \psi(\mu,x)\,dx,$$

wo nun a und b als Funktionen von μ zu betrachten sind und mithin auch der Werth S des Integrales von μ abhängt.

Lassen wir μ sich um $\Delta\mu$ ändern, so gehen a, b, S in $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $S+\Delta S$ über und durch Subtraktion wird

$$\Delta S=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} \psi(\mu+\Delta\mu, x)\,dx-\int_a^b \psi(\mu,x)\,dx.$$

Hier lässt sich das erste Integral in die drei folgenden zerlegen:

$$-\int_a^{a+\Delta a}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx+\int_a^b\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx+\int_b^{b+\Delta b}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx$$

und dadurch nimmt ΔS folgende Gestalt an:

$$\Delta S=\int_b^{b+\Delta b}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx-\int_a^{a+\Delta a}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx$$

$$+\int_a^b[\psi(\mu+\Delta\mu,x)-\psi(\mu,x)]\,dx$$

und durch Division mit $\Delta\mu$, welches in Beziehung auf die Integration constant ist,

$$2)\qquad \frac{\Delta S}{\Delta\mu}=\frac{1}{\Delta\mu}\int_b^{b+\Delta b}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx-\frac{1}{\Delta\mu}\int_a^{a+\Delta a}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx$$

$$+\int_a^b\left\{\frac{\psi(\mu+\Delta\mu,x)-\psi(\mu,x)}{\Delta\mu}\right\}dx.$$

Bezeichnen wir nun das unbestimmte Integral von $\psi(\mu,x)\,dx$ mit $\varphi(\mu,x)$, so dass also

$$3)\qquad \frac{d\varphi(\mu,x)}{dx}=\psi(\mu,x)$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{\Delta\mu}\int_b^{b+\Delta b}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,b+\Delta b)-\varphi(\mu+\Delta\mu,b)}{\Delta\mu}$$

$$=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,b+\Delta b)-\varphi(\mu+\Delta\mu,b)}{\Delta b}\cdot\frac{\Delta b}{\Delta\mu}$$

und auf gleiche Weise

$$\frac{1}{\Delta\mu}\int_a^{a+\Delta a}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,a+\Delta a)-\varphi(\mu+\Delta\mu,a)}{\Delta a}\cdot\frac{\Delta a}{\Delta\mu}.$$

Ausserdem steht in No. 2) unter dem letzten Integralzeichen, der partiell in Beziehung auf μ genommene Differenzenquotient von $\psi(\mu,x)$; dieser ist um so weniger von dem entsprechenden partiellen Differenzialquotienten verschieden, je kleiner $\Delta\mu$ wird, und wir können daher

$$\frac{\psi(\mu+\Delta\mu,x)-\psi(\mu,x)}{\Delta\mu}=\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)+\varepsilon \tag{4}$$

setzen, wo ε eine mit $\Delta\mu$ gleichzeitig verschwindende Grösse bezeichnet. Nach diesen Bemerkungen kann die Gleichung 2) durch die folgende ersetzt werden:

$$\frac{\Delta S}{\Delta\mu}=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,\ b+\Delta b)-\varphi(\mu+\Delta\mu,b)}{\Delta b}\cdot\frac{\Delta b}{\Delta\mu}$$

$$-\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,\ a+\Delta a)-\varphi(\mu+\Delta\mu,a)}{\Delta a}\cdot\frac{\Delta a}{\Delta\mu}$$

$$+\int_a^b\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx+\int_a^b\varepsilon\,dx$$

und hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Gränze für unendlich klein werdende $\Delta\mu$,

$$\frac{dS}{d\mu}=\frac{d\varphi(\mu,b)}{db}\cdot\frac{db}{d\mu}-\frac{d\varphi(\mu,a)}{da}\cdot\frac{da}{d\mu}$$

$$+\int_a^b\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx+Lim\int_a^b\varepsilon\,dx$$

oder vermöge der Gleichung 3)

$$\frac{dS}{d\mu}=\psi(\mu,b)\frac{db}{d\mu}-\psi(\mu,a)\frac{d\mu}{da} \tag{5}$$

$$+\int_a^b\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx+Lim\int_a^b\varepsilon\,dx,$$

Obwohl nun ε bis zur Null abnimmt, so darf man doch nicht schliessen, dass immer

$$Lim \int_a^b \varepsilon\, dx = 0$$

sein müsse, da z. B. für $b = \infty$ der Werth des Integrales völlig unbestimmt werden kann. Um eine genauere Bedingung zu haben, erinnern wir an den bis zum zweiten Gliede genommenen *Taylor*'schen Satz, dem zufolge die Gleichung

$$\psi(\mu + \Delta\mu) = \psi(\mu) + \frac{\Delta\mu}{1}\psi'(\mu) + \frac{(\Delta\mu)^2}{1.2}\psi''(\mu + \vartheta.\Delta\mu)$$

$$(1 > \vartheta > 0)$$

stattfindet, aus welcher folgt

$$\frac{\psi(\mu + \Delta\mu) - \psi(\mu)}{\Delta\mu} = \psi'(\mu) + \tfrac{1}{2}\Delta\mu.\psi''(\mu + \vartheta.\Delta\mu)$$

und ebenso, wenn μ als alleinige Variable angesehen wird

$$\frac{\psi(\mu + \Delta\mu, x) - \psi(\mu, x)}{\Delta\mu} = \psi_\mu'(\mu, x) + \tfrac{1}{2}\Delta\mu.\psi_\mu''(\mu + \vartheta.\Delta\mu, x).$$

Durch Vergleichung mit No. 4) erhalten wir jetzt den Werth von ε, nämlich

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Delta\mu.\psi_\mu''(\mu + \vartheta.\Delta\mu, x)$$

und mithin

$$Lim \int_a^b \varepsilon\, dx = \tfrac{1}{2} Lim \left[\Delta\mu. \int_a^b \psi_\mu''(\mu + \vartheta.\Delta\mu, x)\, dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} Lim \left[\Delta\mu \int \psi_\mu''(\mu, x)\, dx\right].$$

Wenn nun das bestimmte Integral

$$6) \qquad \int_a^b \psi_\mu''(\mu, x)\, dx = \int_a^b \left(\frac{d^2\psi(\mu, x)}{d\mu^2}\right) dx$$

einen endlichen Werth hat, so ist die vorhergehende *Lim* ganz sicher $= 0$, ausserdem aber würde sie sich unter die unbestimmte Form $0.\infty$ stellen. Wir dürfen daher sagen: unter der Voraussetzung, dass das in No. 6) verzeichnete Integral einen endlichen Werth besitzt, gilt die Formel

7) $$D_\mu \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx = \psi(\mu, b) \frac{db}{d\mu} - \psi(\mu, a) \frac{da}{d\mu}$$
$$+ \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx.$$

Kommt μ nur in b, nicht aber in ψ und a vor, so vereinfacht sich die Gleichung wie folgt:

8) $$D_\mu \int_a^b \psi(x)\, dx = \psi(b) \frac{db}{d\mu}$$

ebenso, wenn nur a allein von μ abhängt

9) $$D_\mu \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx = -\psi(a) \frac{da}{d\mu}$$

und diese Formeln sind es, von welchen im Texte Gebrauch gemacht wurde, einmal für $b = \mu$ und einmal für $a = \mu$.

Sind a und b von μ unabhängig, so hat man

10) $$D_\mu \int_a^b \psi(\mu, x)\, d\, x = \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx.$$

Multiplizirt man diese Gleichung, welche auch in der umgekehrten Form

$$\int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx = \frac{d \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx}{d\mu}$$

dargestellt werden kann, mit $d\mu$ und integrirt nachher, so wird

$$\int d\mu \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx = \int_a^b dx\, \psi(\mu, x)$$

und wenn man nach Ausführung der auf μ bezüglichen Integration dieser Variabeln die beiden Werthe $\mu = \beta$, $\mu = \alpha$ ertheilt, so ist durch Subtraction

$$\int_\alpha^\beta d\mu \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx$$

$$= \int_a^b dx\, \psi(\beta, x) - \int_a^b dx\, \psi(\alpha, x) = \int_a^b dx\, [\psi(\beta, x) - \psi(\alpha, x)].$$

Es bedarf nur einer etwas anderen Schreibweise, um diese Formel zu einem der wichtigsten Theoreme der Integralrechnung umzugestalten; für

$$\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)=\varphi(\mu,x)$$

wird nämlich umgekehrt

$$\psi(\mu,x)=\int\varphi(\mu,x)\,d\mu$$

und für $\mu=\beta$, $\mu=\alpha$ durch Subtraction

$$\psi(\beta,x)-\psi(\alpha,x)=\int_\alpha^\beta\varphi(\mu,x)\,d\mu.$$

In das Vorhergehende substituirt, giebt diess die Gleichung

$$11)\qquad \int_\alpha^\beta d\mu\int_a^b\varphi(\mu,x)\,dx=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta\varphi(\mu,x)\,d\mu,$$

welche zu erkennen giebt, dass in einem Doppelintegrale mit constanten Gränzen die Integrationsordnung umgekehrt werden darf, wenn nämlich das Integral

$$\int_a^b\left(\frac{d^2\psi(\mu,x)}{d\mu^2}\right)dx$$

d. h. im vorliegenden Falle

$$12)\qquad \int_a^b\left(\frac{d\varphi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx$$

einen endlichen Werth besitzt. Diese Bedingung ist z. B. immer erfüllt, wenn a und b endliche Grössen sind und die Funktion $\left(\frac{d\varphi(\mu,x)}{d\mu}\right)$ innerhalb der Gränzen $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleibt.

III. Eine auf ganz elementaren Prinzipien beruhende Ableitung dieses wichtigen Theorems ist folgende:

Bezeichnen wir mit K den unbekannten Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

von welchem sich leicht nachweisen lässt, dass er eine endliche bestimmte Grösse sein muss, so kann auch der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\, d\omega$$

sehr leicht angegeben werden. Für $h = 0$ ist derselbe offenbar $= 0$ und für negative h derselbe wie für positive h nur mit entgegengesetztem Zeichen; wir können uns daher auf ein positives von Null verschiedenes h beschränken. Nun ist aber

$$\int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\, d\omega = \int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{h\omega}\, d(h\omega)$$

und folglich für $h\omega = t$ auch

$$= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = K,$$

weil die neuen Integrationsgränzen für t sein würden $t = h\,.\,0 = 0$ und $t = h\,.\,\infty = \infty$; daher gilt die Gleichung

$$1) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\, d\omega = K, \quad \text{für } \infty > h > 0,$$

für $h = 0$ ist dagegen die rechte Seite $= 0$ und für ein negatives h wird sie $= -K$.

Man hat nun allgemeiner für $m > n$

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(m+n)\omega}{\omega}\, d\omega + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(m-n)\omega}{\omega}\, d\omega$$
$$= \tfrac{1}{2}K + \tfrac{1}{2}K = K,$$

dagegen für $m = n$

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2m\omega}{\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2}K,$$

endlich für $m < n$

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(n+m)\omega}{\omega} d\omega - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(n-m)\omega}{\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K = 0$$

und wir können daher sagen: der Werth des Integrales

$$2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega} d\omega$$

ist $\qquad = K \quad , \quad \frac{1}{2}K \quad , \quad 0,$

je nachdem $\qquad m > n \quad , \quad m = n \quad , \quad m < n.$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir das Doppelintegral

$$3) \qquad S = \int_0^\infty d\omega \int_a^b \frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \omega\vartheta \, d\vartheta$$

oder

$$4) \qquad S = \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega} d\omega \int_a^b F(\vartheta) \sin \omega\vartheta \, d\vartheta.$$

Kehren wir in No. 3) die Anordnung der Integrationen um, so wird daraus

$$5) \qquad S = \int_a^b d\vartheta \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \vartheta\omega \, d\omega$$

oder

$$6) \qquad S = \int_a^b F(\vartheta) \, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega} d\omega$$

und zwar ist diese Umkehrung erlaubt, wenn das Integral

$$\int_a^b D_\omega \left[\frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \omega\vartheta\right] d\vartheta$$

einen endlichen Werth besitzt, was jederzeit der Fall ist, wenn $F(\vartheta)$ innerhalb der Gränzen $\vartheta = a$ bis $\vartheta = b$ endlich bleibt.

Wir unterscheiden nun behufs der weiteren Diskussion von No. 6) die Fälle $s > b$, $b > s > a$, $a > s > 0$. — Im ersten Falle hat man we-

gen der für ϑ geltenden Integrationsgränzen $b > \vartheta$, folglich um so mehr $s > \vartheta$ oder $\vartheta < s$ und mithin verschwindet nach No. 2) das auf ω bezügliche Integral; also

$$S = 0 \quad \text{für} \quad s > b. \tag{7}$$

Im zweiten Falle zerlegen wir wie folgt:

$$S = \int_a^s F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin\vartheta\omega \cos s\omega}{\omega}\, d\omega$$

$$+ \int_s^b F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin\vartheta\omega \cos s\omega}{\omega}\, d\omega$$

und dann ist im ersten Integrale $s > \vartheta$ wegen der für ϑ geltenden Integrationsgränzen und mithin verschwindet das auf ω bezügliche Integral; im zweiten Integrale ist dagegen $\vartheta > s$ und folglich der Werth des auf ω bezogenen Integrales $= K$, also

$$S = K \int_s^b F(\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{für } b > s > a. \tag{8}$$

Im dritten Falle $s < a$ ist um so mehr $s < \vartheta$, mithin

$$S = K \int_a^b F(\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{für } a > s > 0. \tag{9}$$

Vergleichen wir jetzt die in No. 6) verzeichnete Form mit den gefundenen Werthen, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega}\, d\omega \int_a^b F(\vartheta) \sin\omega\vartheta\, d\vartheta \tag{10}$$

$$= 0\ ,\ K \int_a^s F(\vartheta)\, d\vartheta\ ,\ K \int_a^b F(\vartheta)\, d\vartheta$$

für: $\quad s > b\ , \quad b > s > a\ , \quad a > s > 0.$

Nennen wir $f(\vartheta)$ das unbestimmte Integral von $F(\vartheta)\, d\vartheta$, so dass also $F(\vartheta) = f'(\vartheta)$ ist, so haben wir durch partielle Integration

$$\int \sin \omega \vartheta \,.\, F(\vartheta)\, d\vartheta$$
$$= \sin \omega \vartheta \int F(\vartheta)\, d\vartheta - \int \omega \cos \omega \vartheta\, d\vartheta \int F(\vartheta)\, d\vartheta$$
$$= \sin \omega \vartheta\, f(\vartheta) - \omega \int \cos \omega \vartheta\, d\vartheta\, f(\vartheta)$$

und durch Einführung der Gränzen $\vartheta = b$, $\vartheta = a$

$$\int_a^b F(\vartheta) \sin \omega \vartheta\, d\vartheta$$
$$= f(b) \sin b\omega - f(a) \sin a\omega - \omega \int_a^b f(\vartheta) \cos \omega \vartheta\, d\vartheta.$$

Substituiren wir diess in No. 10), so folgt:

$$f(b) \int_0^\infty \frac{\sin b\omega \sin s\omega}{\omega}\, d\omega - f(a) \int_a^\infty \frac{\sin a\omega \cos s\omega}{\omega}\, d\omega$$
$$- \int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos \omega \vartheta\, d\vartheta$$
$$= \quad 0, \quad K[f(s) - f(a)] \quad , \quad K[f(b) - f(a)]$$

für $\quad s > b, \quad b > s > a \quad , \quad a > s > 0.$

Die Werthe der beiden ersten Integrale linker Hand lassen sich aber nach No. 2) jederzeit bestimmen, indem man auf die drei unterschiedenen Fälle eingeht. Auf diese Weise findet man sehr leicht, dass der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos \omega \vartheta\, d\vartheta$$

$= K f(s)$ oder $= 0$ ist, je nachdem s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt.

Um die Constante K zu bestimmen, nehmen wir $a = 0$, $b = \infty$, $f(\vartheta) = e^{-r\vartheta}$, wo r eine willkürliche positive Grösse bezeichnet; für alle zwischen $a = 0$ und $b = \infty$ liegenden s, d. h. für jedes positive von Null verschiedene s, muss dann die Gleichung

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_0^\infty e^{-r\vartheta} \cos\omega\vartheta\, d\vartheta = Ke^{-rs}$$

gelten. Mittelst der unbestimmten Integrationsformel

$$\int e^{-r\vartheta} \cos\omega\vartheta\, d\vartheta = \frac{-r\cos\omega\vartheta + \omega\sin\omega\vartheta}{r^2+\omega^2} e^{-r\vartheta}$$

erhält man auf der Stelle aus dem Vorigen

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega\, \frac{r}{r^2+\omega^2} = Ke^{-rs}\quad,\ \infty > s > 0$$

und durch Einführung einer neuen Variabeln τ der Art, dass $\omega = r\tau$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{\cos rs\tau}{1+\tau^2}\, d\tau = Ke^{-rs}.$$

Für $r = 0$ folgt hieraus $K = \frac{1}{2}\pi$. Wir haben demnach das Theorem:

Der Werth des bestimmten Doppelintegrales

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos\omega\vartheta\, d\vartheta$$

ist $= \frac{1}{2}\pi\, f(s)$ oder $= 0$, je nachdem die positive Grösse s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt, a und b selbst als positiv vorausgesetzt.

Geht man von dem analog No. 4) gebildeten Doppelintegrale

$$S = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\sin s\omega}{\omega}\, F(\vartheta) \cos\omega\, d\omega$$

aus, so gelangt man durch ganz dieselben Schlüsse wie vorhin zu dem Correlate des obigen Satzes, nämlich:

Der Werth des bestimmten Doppelintegrales

$$\int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \sin\omega\vartheta\, d\vartheta$$

ist $= \frac{1}{2}\pi\, f(s)$ oder $= 0$, je nachdem die positive Grösse von s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt, a und b selbst als positiv vorausgesetzt.

Es ist nicht ohne Interesse, die geometrische Bedeutung dieser Theoreme zu sehen. Denken wir uns zwei Curven, deren Gleichungen sein mögen

$$y_1 = f(x)$$

und
$$y_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos x\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos \omega\vartheta\, d\vartheta$$

wo nun x constant bleibt für die beiden Integrationen, so ist für alle zwischen a und b liegende x immer $y_2 = y_1$, ausserdem aber $y_2 = 0$; für negative x hat die zweite Curve dieselben Ordinaten wie für gleich grosse positive x. In Fig. 5. giebt die schwächere krumme Linie die willkührliche Curve $y_1 = f(x)$ an, mit welcher die zweite und stärkere Linie von $OA = a$ bis $OB = b$ zusammenfällt.

Die zweite durch *Fourier's* Satz dargestellte Curve ist demnach diskontinuirlich und besteht theils aus der Abscissenachse, theils aus einem Stücke der gegebenen Curve. — Ganz ähnlich ist die Bedeutung der beiden Gleichungen

$$y_1 = f(x)$$

und
$$y_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta$$

nur dass der negative Theil der zweiten Curve umgekehrt liegt.

IV. Nimmt man in den Theoremen *Fourier's* $a = 0$, $b = \infty$, $f(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}$, so ist für alle positiven von Null verschiedenen s

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_0^\infty \frac{\cos \omega\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \int_0^\infty \frac{\sin \omega\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\, d\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Setzt man in den beiden auf ϑ bezüglichen Integralen

$$\vartheta = \frac{s}{\omega}\,\tau,$$

wo τ die neue Variable bezeichnet, s und ω aber constant sind, so ergeben sich die Gleichungen

$$\int_0^\infty \cos s\omega \, d\omega \sqrt{\frac{s}{\omega}} \int_0^\infty \frac{\cos s\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\int_0^\infty \sin s\omega \, d\omega \sqrt{\frac{s}{\omega}} \int_0^\infty \frac{\sin s\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{s}},$$

wofür man schreiben kann

$$\left(\int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\sqrt{\omega}} d\omega\right)\left(\int_0^\infty \frac{\cos s\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{s}$$

$$\left(\int_0^\infty \frac{in\, s\omega}{\sqrt{\omega}} d\omega\right)\left(\int_0^\infty \frac{\sin s\tau}{\sqrt{\tau}} dt\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{s}.$$

Da es in einem bestimmten Integrale gleichgültig ist, mit welchem Buchstaben die Variable der Integration bezeichnet wird, so kann man auch ω statt τ schreiben und erhält dann die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\sqrt{\omega}} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2s}}, \quad \infty > s > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin s\omega}{\sqrt{\omega}} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2s}}, \quad \infty > s > 0.$$

Wir multipliziren hier die zweite mit $\sqrt{-1} = i$ und addiren sie zur ersten; es wird dann

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} e^{s\omega i} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{1/4 \pi i}$$

und diess ist die Formel, von welcher im Texte eine Anwendung gemacht wurde, wobei k und ψ statt s und ω gesetzt worden sind.

V. Schreiben wir in der soeben entwickelten Formel h für s, und führen wir eine neue Variable u ein, indem wir $\alpha = u^2$ setzen, so folgt

$$2\int_0^\infty e^{hu^2 i}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}\quad,\quad \infty > h > 0,$$

wobei für die linke Seite auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hu^2 i}\,du$$

gesetzt werden kann, weil die Funktion $e^{hu^2 i}$ für negative u dieselbe ist, wie für positive. Setzen wir in der nunmehrigen Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hu^2 i}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\;e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

$$u = v - \frac{k}{h},$$

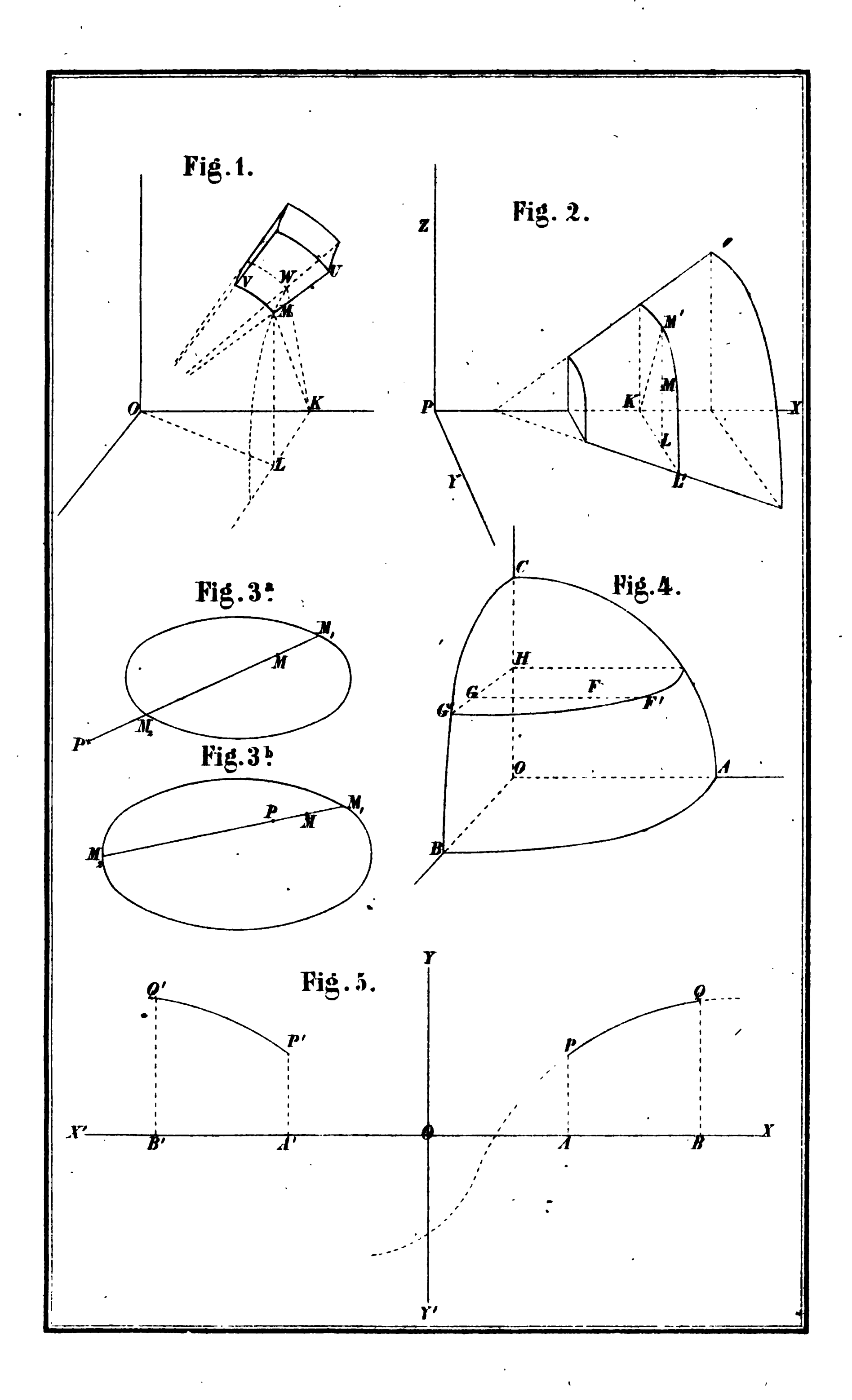
wodurch sich die Integrationsgränzen nicht verändern, so wird

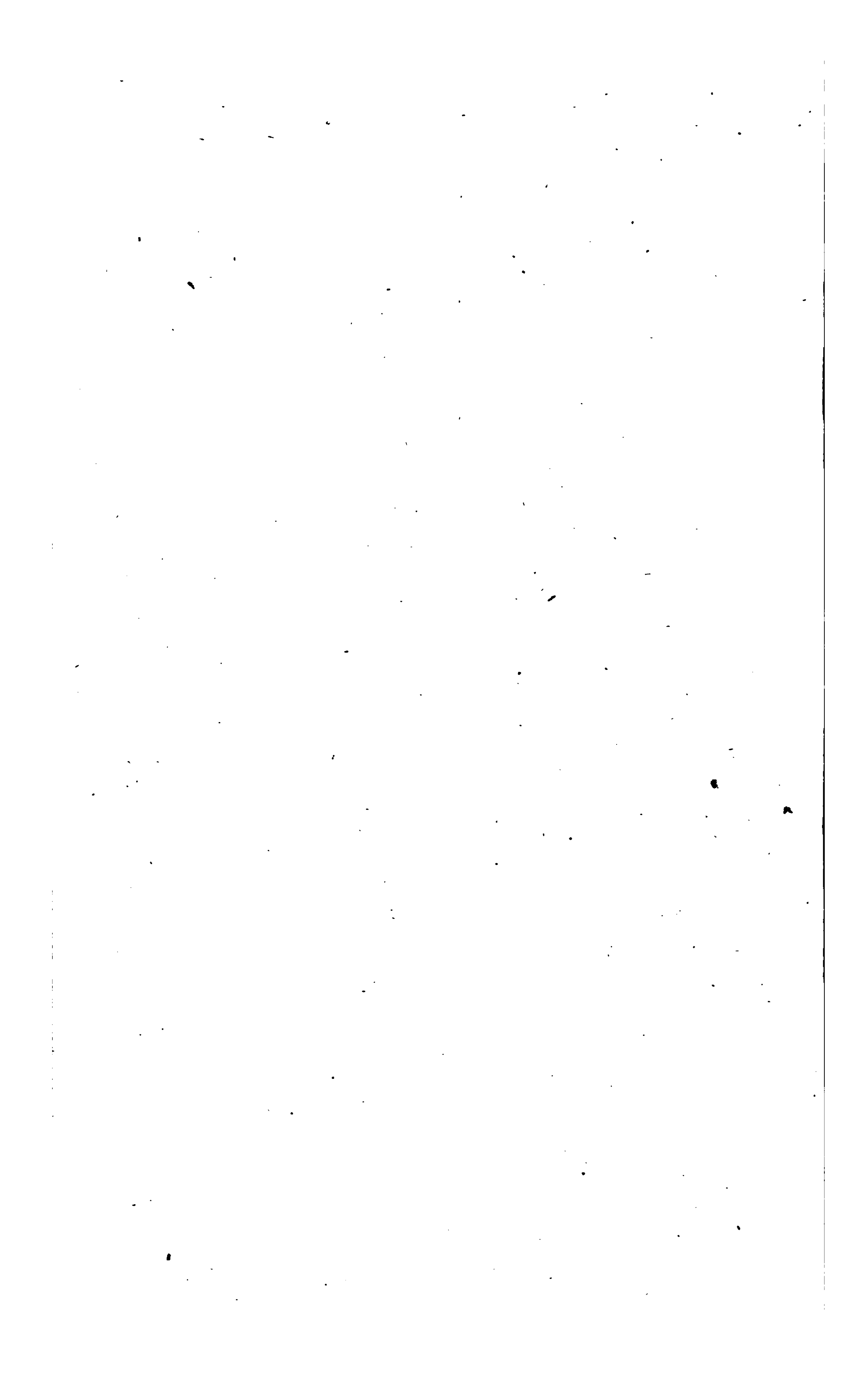
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[hv^2 - 2kv + \frac{k^2}{h}\right]i}\,dv = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

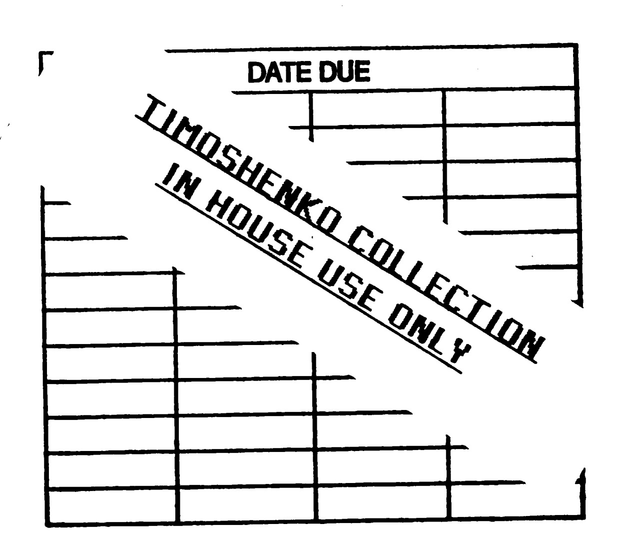
oder durch Transposition des nur von k und h abhängigen Faktors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{[hv^2 - 2kv]i}\,dv = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\;e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{k^2}{h} i}\quad,\quad \infty > h > 0,$$

und diess ist die im Texte benutzte Formel.


Fig. 1.
V
W
U
M
O
K
L
Fig. 2.
Z
P
Y
X
M'
M
K
L
L'
Fig. 3a
M,
M
M
P
Fig. 3b
P
M
M,
M
Fig. 4.
C
H
G
F
G'
F'
O
A
B
Fig. 5.
Y
Q'
P'
P
Q
X'
B'
A'
O
A
B
X
Y'




DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY



